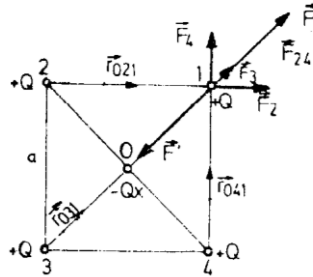


Zadatak 1. U temenima kvadrata stranice a (Sl.1) nalaze se mala tela istoimene količine naelektrisanja $+Q = 4 \cdot 10^{-11}$ C u vakumu. Koliku količinu elektriciteta negativnog znaka treba postaviti u tačku preseka dijagonala, da bi rezultujuća sila na svako naelektrisanje bila jednaka nuli?



Sl.1

Rešenje:

Kulonove sile između naelektrisanja smeštenih u temenima 2, 3 i 4 i naelektrisanja u temenu 1, dati su Kulonovim zakonom sledećim izrazima:

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{r}_{021}, F_2 = k \frac{QQ}{a^2};$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \vec{r}_{031}, F_3 = k \frac{QQ}{2a^2} \text{ i}$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \vec{r}_{041}, F_4 = k \frac{QQ}{a^2},$$

gde je $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$, a $\vec{r}_{021}, \vec{r}_{031}$ i \vec{r}_{041} su jedinični vektori međusobnog rastojanja naelektrisanih tela, orjentisanih prema telu na koje sile deluju. Intenzitet rezultujuće sile svih pozitivnih naelektrisanja koja deluju na telo naelektrisanja u tački 1 je:

$$F = F_3 + \sqrt{F_2^2 + F_4^2} = k \frac{Q^2}{2a^2} + k \sqrt{\frac{Q^4}{a^4} + \frac{Q^4}{a^4}},$$

$$F = k \frac{Q^2}{2a^2} (2\sqrt{2} + 1).$$

U tačku 0 treba postaviti negativno naelektrisanje $-Q_x$ koje će na naelektrisanje u tački 1 delovati silom F' , koja je po pravcu i intenzitetu jednaka sili F , a po smeru suprotna.

$$\vec{F}' = F' \vec{r}_{013}, F' = k \frac{QQ_x}{(a\sqrt{2}/2)^2} = k \frac{2QQ_x}{a^2}.$$

Dakle

$$k \frac{Q^2}{2a^2} (2\sqrt{2} + 1) = k \frac{2QQ_x}{a^2},$$

pa je

$$Q_x = \frac{Q}{4} (2\sqrt{2} + 1) = 38,28 \cdot 10^{-12} \text{ C}.$$

Zadatak 2. Dva tačkasta naelektrisanja se nalaze u vazduhu na rastojanju od 50 cm. Na koje rastojanje treba postaviti ta naelektrisanja u ulje relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 5$ pa da se Kulonova sila ne promeni.

Rešenje:

Intenziteti Kulonovih sila u vazduhu i ulju datie su izrazima:

$$F_V = k \frac{Q_1 Q_2}{r_1^2} \quad \text{i} \quad F_U = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r_2^2}.$$

Izjednačavanjem ovih izraza dobija se:

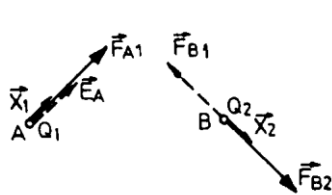
$$k \frac{Q_1 Q_2}{r_1^2} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r_2^2}, \quad \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{\epsilon_r r_2^2},$$

pa zamenom datih vrednosti sledi

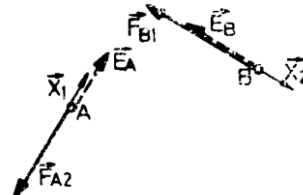
$$r_2 = \sqrt{500} = 22,36 \text{ cm}.$$

Zadatak 3. U tačke A i B formiranog električnog polja unesena su naelektrisanja $Q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ i $Q_2 = -6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Pri tome na naelektrisanje Q_1 deluje sila $F_{A1} = 0,04 \text{ N}$ u smeru \vec{x}_1 dok na naelektrisanje Q_2 deluje sila $F_{B2} = 0,06 \text{ N}$ u smeru \vec{x}_2 kao na slici. Ako naelektrisanja Q_1 i Q_2 zamene mesta, odrediti intenzitete i smerove sila na njih. Međusobno delovanje naelektrisanja Q_1 i Q_2 zanemariti.

Rešenje:



Sl. 2



Sl.3

Intenziteti i smerovi vektora električnog polja u tačkama A i B su:

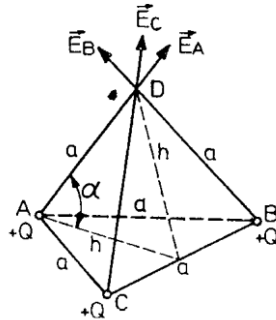
$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}_{A1}}{Q_1} = \frac{0,04}{2 \cdot 10^{-6}} \vec{x}_1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 20 \cdot 10^3 \vec{x}_1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\vec{F}_{B2}}{Q_2} = \frac{0,06}{-6 \cdot 10^{-6}} \vec{x}_2 \frac{\text{V}}{\text{m}} = -10 \cdot 10^3 \vec{x}_2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Kako polja \vec{E}_A i \vec{E}_B imaju nepromenjen smer i intenzitet u slučaju premeštanja naelektrisanja, to sile \vec{F}_{A2} i \vec{F}_{B1} na naelektrisanja Q_2 i Q_1 u tačkama A i B su:

$$\vec{F}_{A2} = \vec{E}_A Q_2 = -0,12 \vec{x}_1 \text{ N}, \quad \vec{F}_{B1} = \vec{E}_B Q_1 = -0,02 \vec{x}_2 \text{ N}.$$

Zadatak 4. Tri mala tela jednakih naelektrisanja $Q = 10 \text{ nC}$ nalaze se u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a = 2 \text{ cm}$ (vidi sliku). Koliki je intenzitet elektrostatičkog polja u temenu pravilnog tetraedra koji ima za osnovu ovaj trougao.



Sl. 4

Rešenje:

Iz razloga simetrije intenziteti vektora elektrostatičkog polja u tački D koji potiču od pojedinih naelektrisanja su jednaki i iznose:

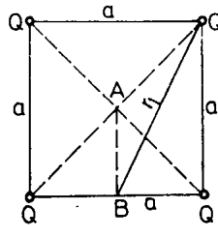
$$E_A = E_B = E_C = k \frac{Q}{a^2},$$

a intenzitet rezultujućeg elektrostatičkog polja u tački D jednak je geometrijskom zbiru intenziteta ovih polja. Kako su horizontalne komponente vektora \vec{E}_A , \vec{E}_B i \vec{E}_C jednake i zaklapaju međusobno ugao $2\pi/3$, to je vektorski zbir ovih komponenti jednak nuli.

Vektori \vec{E}_A , \vec{E}_B i \vec{E}_C zaklapaju sa vertikalom uglove $\frac{\pi}{2} - \alpha$, a vertikalne komponente imaju isti intenzitet, pa je intenzitet rezultujućeg elektrostatičkog polja

$$E = 3k \frac{Q}{a^2} \sin \alpha = 551 \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

Zadatak 5. Četiri mala tela istih naelektrisanja $Q = 1 \text{ nC}$ nalaze se u temenima kvadrata stranice $a = 3 \text{ cm}$ (vidi sliku). Odrediti potencijal u preseku dijagonala kvadrata i potencijalnu razliku između te tačke i sredine jedne od stranica kvadrata.



Sl. 5

Rešenje:

Potencijal elektrostatičkog polja koje potiče od više tačkastih naelektrisanja u vakumu je

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}.$$

U ovom slučaju potencijal tačke A je

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a\sqrt{2}/2} = \frac{Q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a} = 1,2\sqrt{2} \text{ kV}.$$

Potencijal tačke B je

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2Q}{a/2} + \frac{2Q}{r_1} \right), \quad r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

pa je prema tome

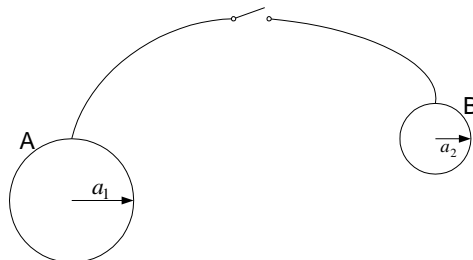
$$V_B = 1,2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \text{ kV} \approx 1,74 \text{ kV}.$$

Razlika potencijala ovih tačaka je:

$$U_{AB} = V_A - V_B = -39,6 \text{ V}.$$

Zadatak 6. Dve provodne sfere poluprečnika $a_1 = 10 \text{ cm}$ i $a_2 = 5 \text{ cm}$ nalaze se u vazduhu i naelektrisane su sa $Q_1 = 100 \text{ pC}$ i $Q_2 = 200 \text{ pC}$. Spojene su prema slici.

- Izračunati napon između tačaka A i B koje se nalaze na površi sfera pri otvorenom prekidaču
- Izračunati količinu naelektrisanja koja protekne kroz provodnik kada se prekidač zatvori i potencijale obe sfere.



Sl. 6

Rešenje:

a)

$$V_A = k \frac{Q_1}{a_1} = 9 \text{ V}, \quad V_B = k \frac{Q_2}{a_2} = 36 \text{ V}, \quad U_{AB} = V_A - V_B = -27 \text{ V}$$

b)

Kada se prekidač zatvori elektricitet protiče dok se potencijal obe kugle ne izjednače, $V_A = V_B$. Kako su naelektrisanja prve i druge kuglice $Q_1 + \Delta Q$ i $Q_2 - \Delta Q$, to je

$$k \frac{Q_1 + \Delta Q}{a_1} = k \frac{Q_2 - \Delta Q}{a_2}.$$

Zamenom datih vrednosti dobija se

$$\Delta Q = 100 \text{ pC}, \quad \text{odnosno } V_A = V_B = 18 \text{ V}.$$

Zadatak 7. Na rastojanju $r = 0.5 \text{ m}$ od naelektrisanja Q potencijal iznosi $V = 1 \text{ kV}$. Koliko iznosi intenzitet električnog polja u tački A koja se nalazi na rastojanju 2 m od naelektrisanog tela.

Rešenje:

$$E_A = k \frac{Q}{r_1^2} = k \frac{\frac{V \cdot r}{k}}{r_1^2} = \frac{V \cdot r}{r_1^2} = 125 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Zadatak 8. Dve metalne kugle postavljene u vakumu su naelektrisane istim količinama naelektrisanja $Q = 2 \text{ nC}$ i imaju kapacitete $C_1 = 10 \text{ pF}$ i $C_2 = 20 \text{ pF}$. Izračunati poluprečnik kugli i napon između njih.

Rešenje:

$$V_1 = k \frac{Q}{r_1} \text{ i } V_2 = k \frac{Q}{r_2},$$

pa je

$$r_1 = \frac{kQ}{V_1} \text{ odnosno } r_2 = \frac{kQ}{V_2},$$

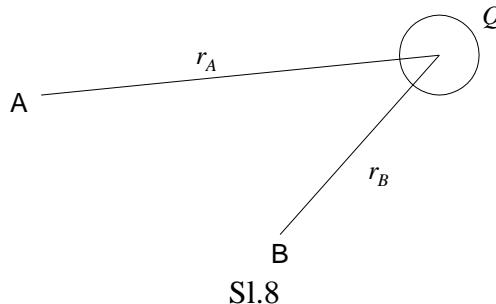
gde je

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = 200 \text{ V i } V_2 = \frac{Q}{C_2} = 100 \text{ V}.$$

Dakle, zamenom ovih vrednosti dobija se $r_1 = 0.09 \text{ m}$ i $r_2 = 0.18 \text{ m}$ a $U_{12} = V_1 - V_2 = 100 \text{ V}$.

Zadatak 9. U vakumu se nalazi provodna kugla naelektrisana nepoznatom količinom elektriciteta Q . Poluprečnik kugle je r . Pri pomeranju tačkastog naelektrisanja $Q_p = 1 \text{ pC}$ iz tačke A u tačku B elektrostatička sila izvrši rad od 270 pJ . Tačke A i B su na rastojanju r_A , odnosno r_B od centra kugle. Poznato je $r = 3 \text{ mm}$, $r_A = 5 \text{ cm}$ i $r_B = 2 \text{ cm}$. Odrediti:

- Napon U_{AB} ;
- Naelektrisanje Q i potencijal V kugle u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti i
- Jačinu elektrostatičkog polja u centru kugle.



Rešenje:

a)
$$U_{AB} = \frac{A}{Q_p} = 270 \text{ V}$$

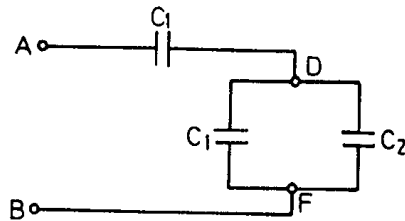
b)

$$U_{AB} = V_A - V_B = kQ \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = kQ \frac{r_B - r_A}{r_B r_A},$$

$$Q = \frac{U_{AB} r_A r_B}{k(r_B - r_A)} = -1 \text{ nC}.$$

c) Kako je kugla naelektrisana po površini iz uslova elektrstatičke ravnoteže je $E_0 = 0$.

Zadatak 10. Tri kondenzatora vezana su u grupu kao na slici.



Sl. 9

- a) Ako je kapacitivnost kondenzatora $C_1 = 3 \mu\text{F}$, kolika treba da bude kapacitivnost kondenzatora C_2 da bi ekvivalentna kapacitivnost bila C_2 .
- b) Za vrednosti C_1 i C_2 iz tačke a) odrediti opterećenosti pojedinih kondenzatora ako se između tačaka A i B priključi napon $U_{AB} = 400 \text{ V}$.

Rešenje:

a)

Ekvivalentna kapacitivnost date grupe je

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2} = \frac{1}{C_2}.$$

Rešavanjem ove jednačine dobija se:

$$C_2 = 0,618 C_1 = 1,854 \mu\text{F}.$$

b)

Kako je

$$U_{ab} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q_1}{C_1}$$

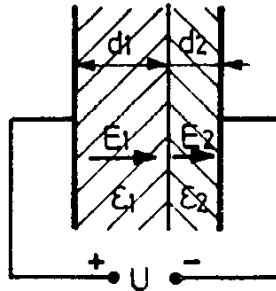
$$U_{DF} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}, \quad U_{AB} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q}{C_1}, \quad Q = Q_1 + Q_2, \quad U_{ab} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = U_{ab} - Q_2 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

to se iz ovih relacija dobijaju opterećenosti:

Za C_1 između A i D $Q = 741,36 \mu\text{C}$
 Za C_1 između D i F $Q_1 = 458,59 \mu\text{C}$
 Za C_2 između D i F $Q_2 = 282,77 \mu\text{C}$.

Zadatak 11. Pločasti kondenzator sa dva sloja dielektrika, sl. 10, priključen je na napon $U = 1 \text{ kV}$. Ako su $d_1 = 2 \text{ mm}$, $d_2 = 1 \text{ mm}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, $\epsilon_{r1} = 2$ i $\epsilon_{r2} = 4$, kolike su energije u pojedinim dielektricima i ukupna energija?



Sl.10

Rešenje: $C_1 = \epsilon_1 \frac{S}{d_1}$, $C_2 = \epsilon_2 \frac{S}{d_2}$

Energije kondenzatora kapacitivnosti C_1 i C_2 su:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 \quad W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2$$

a ukupna energija je

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U^2.$$

Iz definicije napona između obloga kondenzatora i uslova za jednakost intenziteta vektora dielektričnih pomeraja (normalnih komponenti):

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad \text{i} \quad \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2,$$

dobija se

$$E_1 = \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \quad E_2 = \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}.$$

Sada su energije:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 E_1^2 d_1^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 E_2^2 d_2^2$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_1 S \frac{\epsilon_2^2 U^2}{(\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1)^2} d_1 = 28,32 \mu\text{J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_2 S \frac{\epsilon_1^2 U^2}{(\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1)^2} d_2 = 7,08 \mu\text{J}$$

$$W = W_1 + W_2$$

$$W = 35,4 \mu\text{J}.$$

Zadatak 12. Za vlakno sijalice snage $P=100\text{ W}$ predviđenu za napon $U=220\text{ V}$, koristi se 45 mg volframa. Specifična otpornost volframa na radnoj temperaturi od 2400° C je $\rho=0,923\Omega\text{m}$, a specifična masa volframa $\rho_m=19,3\text{ g/cm}^3$. Odrediti potrebnu dužinu i prečnik vlakna.

Rešenje:

Otpornost zagrejane sijalice je:

$$R = \frac{U^2}{P} = 484\Omega$$

S druge strane je

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

gde je l dužina žice, a S površina poprečnog preseka. Kako je masa volframa

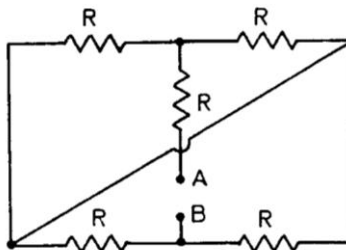
$$m = \rho_m S l = \rho_m \frac{\pi d^2}{4} l$$

to je

$$484 = \frac{4m}{\rho_m \pi d^2},$$

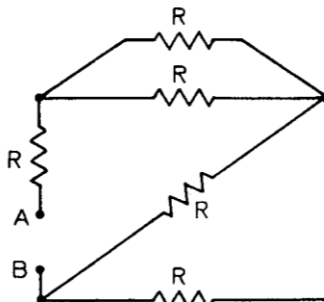
odakle je $d = 0.052\text{ mm}$, a dužina žice $l = 1.1\text{ m}$.

Zadatak 13. Naći ukupnu otpornost između tačaka A i B sa slike.



Sl.11

Rešenje:



Sl.12

$$R = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = 2R.$$

Zadatak 14. Električni bojler ima dva grejača. Kada je uključen jedan grejač voda proključa za 15 minuta, a kada je uključen drugi za 30 minuta. Koliko je vremena potrebno da voda proključa kada su uključena oba grejača i to :

- a) na red
- b) paralelno?

Rešenje:

Da bi voda proključala potrebno je uložiti rad

$$A = Pt .$$

U oba slučaja rad mora biti isti pa je

$$P_1 t_1 = P_2 t_2 ,$$

$$P_1 = \frac{t_2}{t_1} P_2 = 2P_2 .$$

S druge strane je

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} \text{ i } P_2 = \frac{U^2}{R_2} ,$$

pa je $\frac{U^2}{R_1} = 2 \frac{U^2}{R_2}$, odnosno $R_2 = 2R_1$.

a)

$$P = \frac{U^2}{R_1 + 2R_1} = \frac{P_1}{3} ,$$

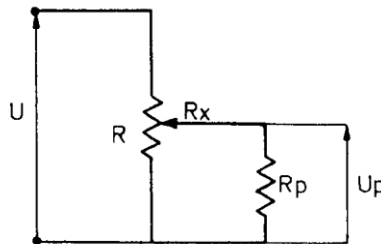
$$Pt = P_1 t_1 = \frac{P_1}{3} t , \text{ pa je } t = 3t_1 = 45 \text{ min} .$$

b)

$$P = \frac{U^2}{R_2/2} + \frac{U^2}{R_2} = 3P_2 ,$$

$$Pt = P_2 t_2 = 3P_2 t , \text{ pa je } t = t_2/3 = 10 \text{ min} .$$

Zadatak 15. Prijemnik R_p priključen je na izvor napona U preko delitelja napona otpornosti $R = 100\Omega$ (vidi sliku). Naći vrednost otpornosti R_x , gde treba priključiti prijemnik, ako je odnos napona $\frac{U}{U_p} = 2$, a $R_p = 50\Omega$.



Sl.13

Rešenje:Napon na otporniku R_x

$$U_x = U - U_p = U - \frac{U}{2} = \frac{U}{2} = R_x I_x, \quad I_x = \frac{U}{R_e},$$

gde je

$$R_e = R_x + \frac{(R - R_x)R_p}{R - R_x + R_p}$$

pa je

$$\frac{U}{2} = \frac{UR_x}{R_x + \frac{(R - R_x)R_p}{R - R_x + R_p}}, \quad R = 2R_p.$$

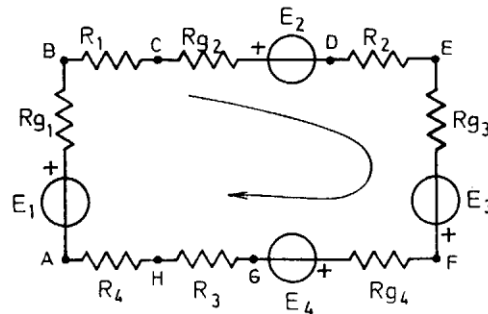
Rešavanjem ove jednačine po R_x dobija se

$$R_{x1/2} = R_p (2 \pm \sqrt{2}).$$

Rešenje sa znakom + ne zadovoljava jer bi bilo $R_x > R$ pa je tražena vrednost otpornosti

$$R_{x1/2} = R_p (2 - \sqrt{2}) = 29,289 \Omega.$$

Zadatak 16. Izračunati jačinu struje u kolu prikazanom na slici (za označeni referentni smer), napone između krajeva svih elemenata i snage svih generatora. Poznato je: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 30 \text{ V}$, $E_g = 40 \text{ V}$, $R_{g1} = R_{g2} = R_{g3} = R_{g4} = 1 \Omega$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$ i $R_4 = 4 \Omega$.

Rešenje:

Sl.14

Jačina struje u kolu određena je izrazom

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{R_{g1} + R_{g2} + R_{g3} + R_{g4} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = -0,833 \text{ A}.$$

Naponi na krajevima generatora i otpornika su:

$$U_{BA} = E_1 - R_{g1}I = 10,833 \text{ V}$$

$$U_{FE} = E_3 - R_{g3}I = 30,833 \text{ V}$$

$$U_{BC} = R_1I = -4,167 \text{ V}$$

$$U_{GH} = R_3I = -6,667 \text{ V}$$

$$U_{CD} = E_2 + R_{g2}I = 19,167 \text{ V}$$

$$U_{FG} = E_4 + R_{g4}I = 39,167 \text{ V}$$

$$U_{AH} = -R_4I = 3,333 \text{ V}$$

$$U_{DE} = R_2I = -2,5 \text{ V}.$$

Snage svih (realnih) generatora su:

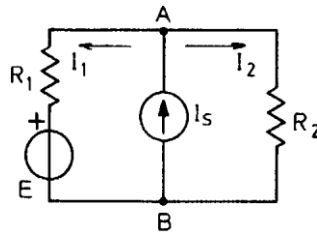
$$P_{g1} = U_{BA}I = E_1I - R_{g1}I^2 = -9,03 \text{ W}$$

$$P_{g2} = U_{CD}I = E_2I - R_{g2}I^2 = -15,97 \text{ W}$$

$$P_{g3} = U_{FE}I = E_3I - R_{g3}I^2 = -25,69 \text{ W}$$

$$P_{g4} = U_{FG}I = E_4I - R_{g4}I^2 = -32,64 \text{ W}.$$

Zadatak 17. Izračunati jačinu struje kroz otpornike R_1 i R_2 (vidi sliku). Odrediti snage strujnog i naponskog generatora. Poznato je: $E = 10 \text{ V}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ i $I_s = 2 \text{ A}$.



Sl.15

Rešenje:

Za dato kolo je potrebno postaviti jednu jednačinu po prvom Kirchofovom zakonu i jednu jednačinu po drugom Kirchofovom zakonu.

$$I_s = I_1 + I_2$$

$$E + R_1I_1 - R_2I_2 = 0.$$

Rečavanjem ovih jednačina dobija se:

$$I_1 = \frac{R_2I_s - E}{R_1 + R_2} = -\frac{1}{3} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{R_1I_s + E}{R_1 + R_2} = \frac{7}{3} \text{ A}.$$

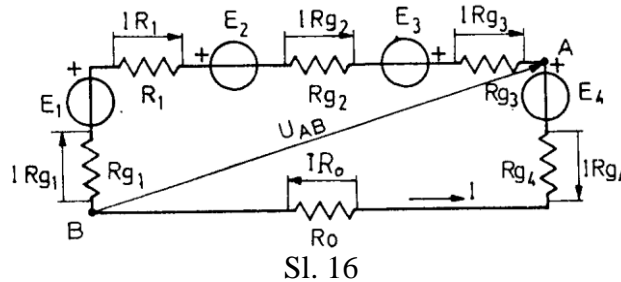
Snaga idealnog strujnog generatora je

$$P_s = U_{AB}I_s = R_2I_2I_s = \frac{56}{3} \text{ W}$$

Snaga koju razvija idealni naponski generator je:

$$P_e = -EI_1 = \frac{10}{3} \text{ W}.$$

Zadatak 18. Za kolo sa slike odrediti napon U_{AB} . Brojni podaci su: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 15\text{ V}$, $E_3 = 15\text{ V}$, $E_4 = 20\text{ V}$, $R_{g1} = R_{g2} = R_{g3} = R_{g4} = 0,1\Omega$, $R_0 = 5\Omega$ i $R_1 = 4,6\Omega$.



Rešenje:

Za usvojeni smer struje u kolu je :

$$I = \frac{E_2 + E_4 - E_1 - E_3}{R_{g1} + R_{g2} + R_{g3} + R_{g4} + R_1 + R_0} = 1\text{ A}.$$

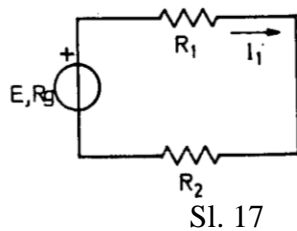
Napon izmedju tačaka A i B je :

$$U_{AB} = E_4 - R_{g4}I - R_0I$$

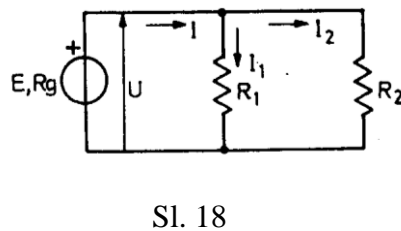
$$U_{AB} = R_{g1}I + E_1 - E_2 + R_1I + R_{g2}I + E_3 + R_{g3}I = 14,9\text{ V}.$$

Zadatak 19. Kada generator elektromotorne sile E i unutrašnje otpornosti R_g napaja rednu vezu otpora $R_1 = 5\Omega$ i $R_2 = 10\Omega$ tada u kolu postoji struja I_1 . Ako isti generator napaja paralelnu vezu ovih otpora tada kroz otpor R_1 postoji ista struja I_1 , a napon na krajevima generatora je tada $U = 10\text{ V}$. Odrediti elektromotornu silu E i unutrašnju otpornost R_g generatora.

Rešenje:



Sl. 17



Sl. 18

Za rednu vezu struja je

$$I_1 = \frac{E}{R_g + R_1 + R_2},$$

a za paralelnu vezu

$$I_1 = \frac{U}{R_1}.$$

Izjednačavanjem desnih strana gornjih jednačina dobija se

$$E = U \left(\frac{R_g}{R_1} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right). \quad (19.1)$$

Napon U je dat izrazom $U = E - R_g I$.

Kako je

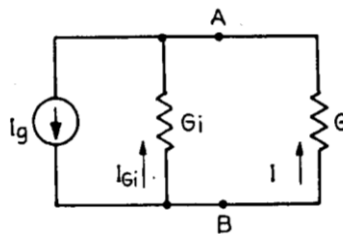
$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

to je

$$U = E - R_g \left(\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \right). \quad (19.2)$$

Rešavanjem jednačina (19.1), (19.2) dobija se $E = 70 \text{ V}$ i $R_g = 20 \Omega$.

Zadatak 20. Na krajevima provodnosti $G = 20 \text{ mS}$ (videti sliku) izmeren je napon $U_{AB} = -40 \text{ V}$. Kolika je unutrašnja provodnost G_i izvora i kako izgleda ekvivalentni naponski izvor ako je $I_g = 0,85 \text{ A}$?



Sl.19

Rešenje:

Za vrednost napona U_{AB} struja I označenog smera je

$I = U_{BA} G = 0,8 \text{ A}$, tako da je $I_{G_i} = I_g - I = 0,05 \text{ A}$. Kako se napon U_{AB} može

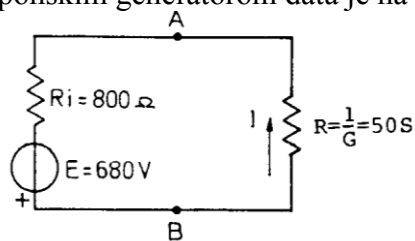
izraziti kao $U_{AB} = -\frac{I_{G_i}}{G_i}$ to je $G_i = 1,25 \text{ mS}$.

Ekvivalentni naponski izvor ima elektromotornu silu:

$E = \frac{I_g}{G_i} = 680 \text{ V}$ i vezan je u seriju sa provodnošću G_i , odnosno unutrašnjom

otpornošću $R_i = \frac{1}{G_i} = 800 \Omega$.

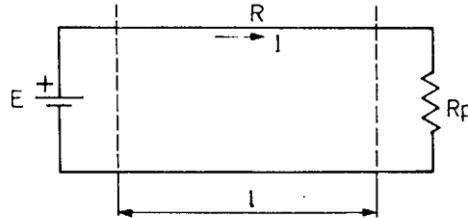
Ekvivalentna šema sa naponskim generatorom data je na Sl.20 .



Sl. 20

Zadatak 21. Na izvor konstantnog napona priključuje se bakarnim provodnikom prečnika $d = 2,11 \text{ mm}$ i dužine $l = 200 \text{ m}$ omski prijemnik snage $P = 5 \text{ kW}$, na kojem se javlja napon $U_p = 500 \text{ V}$.

- Kolika se energija pretvara u toplotu u prijemniku za 1 sat?
- Koliki je stepen iskorišćenja η prenosa energije od izvora do prijemnika?
- Koliki je napon izvora?



Sl. 21

Rešenje:

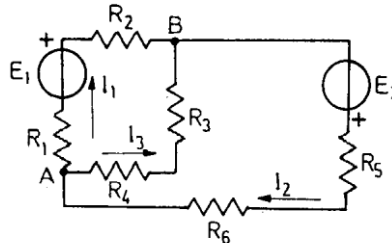
Otpornost provodnika je $R = \rho \frac{2l}{S} = 2 \Omega$.

Iz date snage prijemnika je $I = \frac{P}{U} = 10 \text{ A}$ dok je električna otpornost prijemnika

$R_p = \frac{U^2}{P} = 50 \Omega$. Snaga koja se razvija u provodniku usled Džulovog efekta je $P_j = RI^2 = 200 \text{ W}$.

- Energija koja se za jedan sat pretvara u toplotu na prijemniku je: $A = UIt = 18 \text{ MJ}$
- Koeficijent iskorišćenja je $\eta = \frac{P}{P + P_j} 100 = 96,2\%$
- Napon izvora je $E = I(R_p + R) = 520 \text{ V}$

Zadatak 22. Za kolo sa slike odrediti struje grana neposrednom primenom I i II Kirhofovog zakona. Poznati su sledeći podaci: $E_1 = 90 \text{ V}$, $E_2 = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$, $R_6 = 7 \Omega$.



Sl. 22

Rešenje:

Po I Kirhofovom zakonu potrebno je napisati jednu jednačinu npr. za čvor A a po II Kirhofovom zakonu dve jednačine za dve konture u kolu. One izgledaju ovako:

$$A: I_2 = I_1 + I_3$$

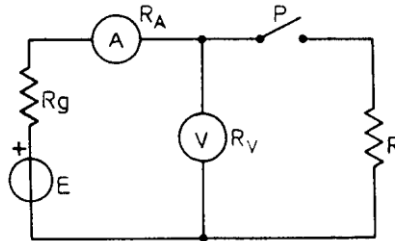
$$S_1: E_1 - I_1(R_1 + R_2) + I_3(R_3 + R_4) = 0$$

$$S_2: E_2 - I_2(R_5 + R_6) - I_3(R_3 + R_4) = 0$$

Zamenom brojnih vrednosti i njihovim rešavanjem dobijaju se struje:

$$I_1 = 4 \text{ A}, I_2 = 7 \text{ A} \text{ i } I_3 = 3 \text{ A}.$$

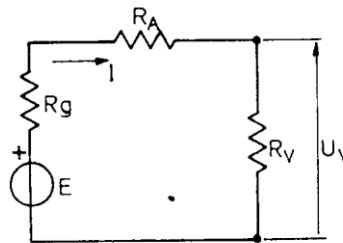
Zadatak 23. U kolu sa slike vezani su ampermetar i voltmetar. Kada je prekidač P otvoren struja kroz izvor iznosi 10 mA, a napon na krajevima voltmetra 20 V. Zatvaranjem prekidača P paralelno sa voltmetrom uključuje se otpornik R i tada struja kroz ampermetar iznosi 42 mA, a napon na krajevima voltmetra 16,8 V. Odrediti unutrašnju otpornost voltmetra R_V , otpornost R, elektromotornu silu izvora E i zbir unutrašnje otpornosti izvora i ampermetra, $(R_g + R_A)$.



Sl.23

Rešenje:

Kada je P otvoren kolo izgleda kao na Sl. 24, gde je $I = 10 \text{ mA}$ i $U_V = 20 \text{ V}$.

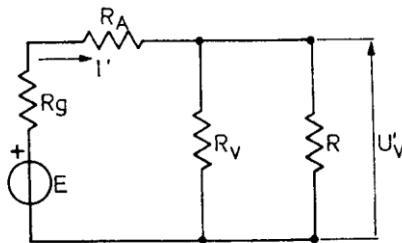


Sl. 24

Jasno je da je $R_V = \frac{U_V}{I} = 2 \text{ k}\Omega$, a po II Kirhofovom zakonu može se napisati jednačina

$$E - (R_g + R_A)I - U_V = 0$$

Zatvaranjem prekidača kolo sad izgleda kao na sl.25



Sl.25

Kako je napon koji pokazuje voltmetar

$$U'_V = \frac{R_V R}{R_V + R} I' \text{ to je } R = \frac{U'_V R_V}{I' R_V - U'_V} = 500 \Omega.$$

Po II Kirhofovom zakonu može se napisati jednačina

$$E = (R_g + R_A) I' - U'_V = 0.$$

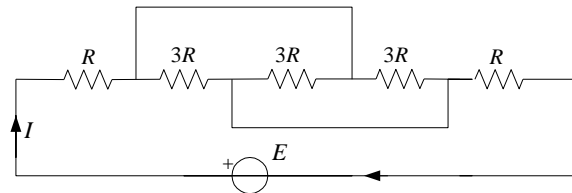
Na osnovu prethodnih jednačina dobija se

$$E = U_V + I \frac{U_V - U'_V}{I' - I} = 21 \text{ V}.$$

Na kraju, zbir unutrašnje otpornosti izvora i ampermetra je

$$R_g + R_A = \frac{E - U_V}{I} = 100 \Omega.$$

Zadatak 24. U električnom kolu datom na slici odrediti struju I ako su poznate vrednosti: $E = 30 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$.

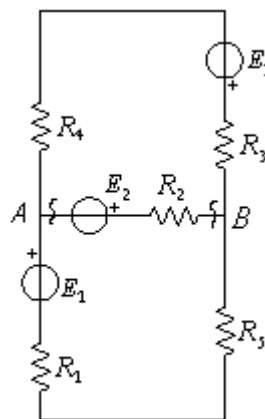


S1.26

Rešenje:

$$R_e = R + R + R = 30 \Omega, \quad I = \frac{E}{R_e} = 1 \text{ A}.$$

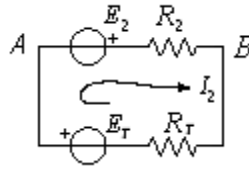
Zadatak 25. Primenom Tevenenove teoreme odrediti struju u grani sa elementima E_2 i R_2 kola na S1.27. Date su brojne vrednosti: $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$, $E_1 = 3 \text{ V}$, $E_2 = E_3 = 7 \text{ V}$.



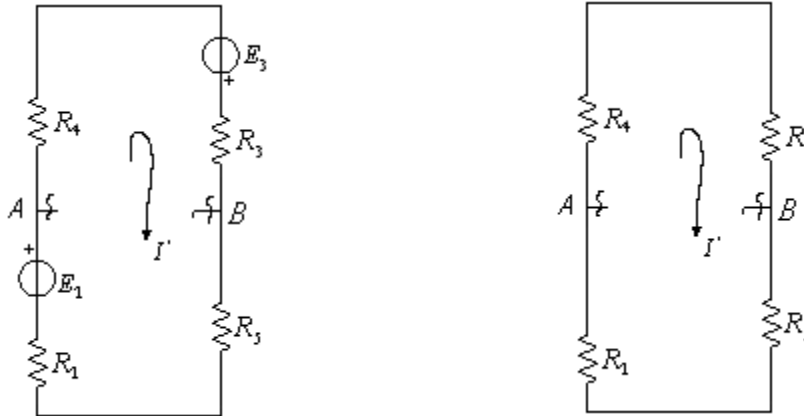
S1.27

Rešenje:

Koristeći Tevenenovu teoremu može se ostatak kola u odnosu na granu AB zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom:



Tada je : $I_2 = \frac{E_T + E_2}{R_T + R_2}$,



$$E_T = U'_{AB} = \sum_B^A (E, -RI) = -R_5 I' - R_1 I' + E_1,$$

$$I' = \frac{E_3 + E_1}{R_3 + R_5 + R_1 + R_4} = 0,1 \text{ A},$$

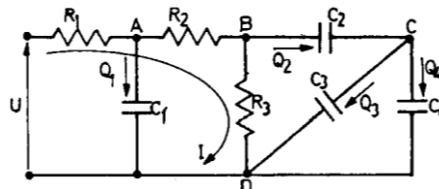
$$E_T = U'_{AB} = -1 \text{ V}$$

$$R_T = R'_{AB} = \frac{(R_4 + R_3)(R_1 + R_5)}{R_3 + R_5 + R_1 + R_4} = 24 \Omega.$$

$$I_2 = \frac{-1 + 3}{24 + 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} = 0,0667$$

$$I_2 = 0,0667 \text{ A}$$

Zadatak 26. Za mrežu sa slike poznato je: $U = 300 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 15 \Omega$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \mu\text{F}$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$, $C_4 = 3 \mu\text{F}$. Odrediti naelektrisanja kondenzatora kada nastupi stacionarno stanje.



S1.28

Rešenje:

U kolu sa slike je naznačen smer struje i pretpostavljeni smerovi za krajnje opterećenosti kondenzatora.

Struja je

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 10 \text{ A} .$$

Napon na krajevima kondenzatora je C_1

$$U_1 = U - R_1 I = 200 \text{ V}$$

a njegovo naelektrisanje

$$Q_1 = C_1 U_1 = 200 \mu\text{C} .$$

Napon na krajevima otpornosti je R_3 je

$$U_{BD} = R_3 I = 150 \text{ V} .$$

Za preostala tri kondenzatora mogu se napisati sledeće jednačine:

$$Q_2 = Q_3 + Q_4$$

$$\frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_4}{C_4}$$

$$\frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_2}{C_2} = U_{BD}$$

Rešavanjem ovih jedničina dobijamo krajnje opterećenosti:

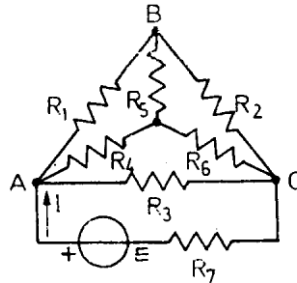
$$Q_2 = 375 \mu\text{C} , Q_3 = 150 \mu\text{C} \text{ i } Q_4 = 225 \mu\text{C} .$$

Zadatak 27. Za kolo sa slike odrediti struju I u slučajevima:

a) trougao sa otpornicima R_1, R_2, R_3 transfigurisati u zvezdu.

b) zvezdu sa otpornicima R_4, R_5, R_6 transfigurisati u trougao.

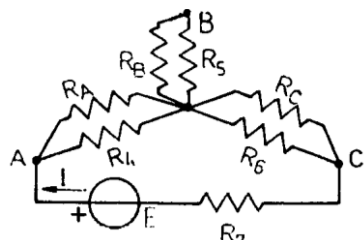
Brojni podaci: $E = 10 \text{ V} , R_1 = R_2 = R_3 = 3\Omega , R_4 = R_5 = R_6 = 1\Omega$ i $R_7 = 1\Omega$.



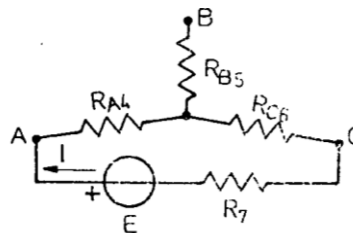
Sl.29

Rešenje:

a) Transfiguracijom trougla otpornosti u zvezdu dobija se kolo na Sl.29a odnosno Sl.29b.



Sl. 29.a



Sl. 29b

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1\Omega = R_B = R_C.$$

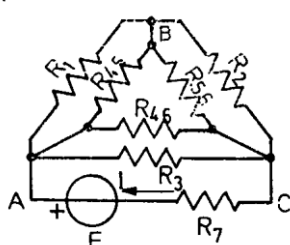
Struja je

$$I = \frac{E}{R_7 + R_{A4} + R_{C6}} = 5 \text{ A},$$

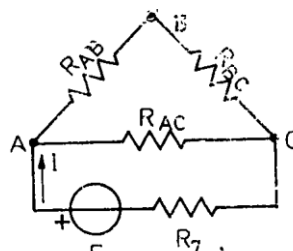
gde je

$$R_{A4} = R_{B5} = R_{C6} = 0,5\Omega.$$

b) Kod transformacije zvezde otpornosti R_4, R_5, R_6 u trougao dobija se kolo na Sl.29c i Sl.29d.



Sl. 29.c



Sl. 29d

Sada je

$$R_{45} = R_{56} = R_{46} = 3\Omega \text{ i}$$

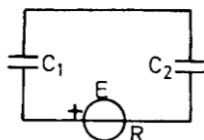
$$R_{AB} = R_{BC} = R_{AC} = 1,5\Omega,$$

$$R = R_7 + \frac{(R_{AB} + R_{BC})R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = 2\Omega \quad \text{a struja je } I = \frac{E}{R} = 5 \text{ A}.$$

Zadatak 28. Dva neopterećena kondenzatora i generator elektromotorne sile E vezani su u kolo kao na slici. Kada se u kolu uspostavi stacionarno stanje primaknu se ploče kondenzatora C_1 tako da se rastojanje između njih smanji n puta. Odrediti:

- priraštaje elektrostatičkih energija kondenzatora posle deformisanja prvog kondenzatora
- rad koji se pretvori u Džulovu toplotu pri ovoj deformaciji.

Brojne vrednosti $C_1 = C_2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ F}$, $E = 200 \text{ V}$, $R = 10\Omega$, $n = 4$.



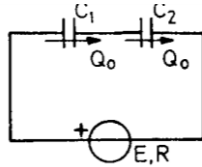
Sl.30

Rešenje:

a) Za kolo sa Sl.30a je

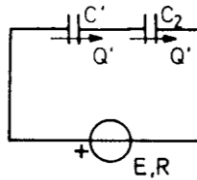
$$Q_1 = Q_2 = Q_0, \quad E - \frac{Q_0}{C_1} - \frac{Q_0}{C_2} = 0, \quad Q_0 = \frac{EC}{2} = 0,4 \text{ mC}$$

$$W_0 = W_1 + W_2 = \frac{Q_0^2}{2C_1} + \frac{Q_0^2}{2C_2} = 0,04 \text{ J}.$$



Sl. 30a

Za kolo sa Sl.30.b je



Sl. 30b

$$C' = \varepsilon \frac{S}{b} = \varepsilon \frac{nS}{b} = nC_1 = 4C_1, \quad E - \frac{Q'}{C'} - \frac{Q'}{C_2} = 0, \quad E - \frac{5Q'}{4C_2} = 0, \quad Q' = \frac{4CE}{5} = 0,64 \text{ mC}$$

$$W' = \frac{Q'^2}{2C'} + \frac{Q'^2}{2C_2} = 0,064 \text{ J}.$$

Priraštaj elektrostatičke energije je: $\Delta W = W' - W_0 = 0,024 \text{ J}.$

b) Protekla količina elektriciteta u kolu sa Sl.30b je:

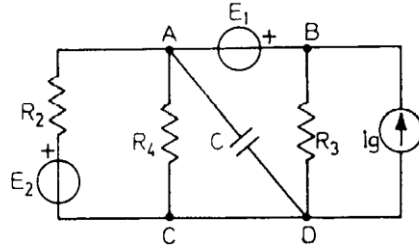
$$q' = Q' - Q_0 = 0,24 \text{ mC}$$

Rad generatora je $A_g = Eq' = 0,048 \text{ J}.$

Zadatak 29. Primenom teoreme superpozicije u kolu prikazanom na Sl. 31. Odrediti:

- struju u grani sa otpornikom otpornosti R_4 ;
- snagu koja se razvija na otporniku otpornosti R_4 i
- elektrostatičku energiju kondenzatora u stacionarnom stanju.

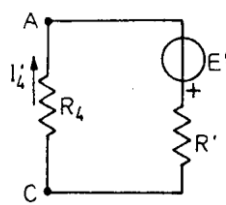
Brojne vrednosti: $E_1 = 20 \text{ V}, \quad E_2 = 10 \text{ V}, \quad I_g = 40 \text{ mA}, \quad C = 8 \mu\text{F}, \quad R_2 = 100\Omega,$
 $R_3 = 200\Omega, \quad R_4 = 400\Omega.$



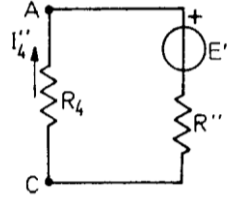
Sl. 31

Rešenje:

a) Kada u kolu deluje samo elektromotorna sila E_1 , Sl.31a :



Sl. 31a



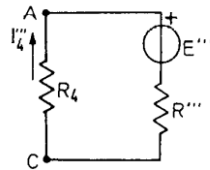
Sl. 31b

$$E' = \frac{E_1 R_2}{R_2 + R_3} = \frac{20}{3} \text{ V}, \quad R' = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3} = \frac{200}{3} \Omega, \quad I_4' = \frac{E'}{R_4 + R'} = \frac{1}{70} \text{ A}.$$

Kada u kolu deluje samo elektromotorna sila E_2 , Sl. 31b :

$$E'' = \frac{E_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20}{3} \text{ V}, \quad R'' = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3} = \frac{200}{3} \Omega, \quad I_4'' = \frac{-E''}{R_4 + R''} = -\frac{1}{70} \text{ A}.$$

Kada u kolu deluje samo strujni generator I_g , Sl.31c :



Sl.31c

$$E''' = R I_g = \frac{8}{3} \text{ V}, \quad R''' = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3} = \frac{200}{3} \Omega, \quad I_4''' = \frac{-E'''}{R_4 + R'''} = -\frac{1}{175} \text{ A}.$$

Na osnovu principa superpozicije je:

$$I_{AC} = I_4 = -\left(I_4' + I_4'' + I_4'''\right) = \frac{1}{175} \text{ A}.$$

b) Snaga koja se razvija na otporniku otpornosti R_4 je:

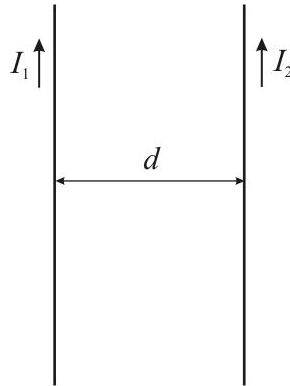
$$P_4 = R_4 I_4^2 = 13,06 \text{ mW}.$$

c) Napon na krajevima kondenzatora je:

$$U_{AC} = R_4 I_4 = 2,28 \text{ V},$$

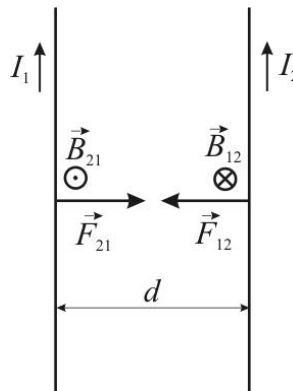
$$\text{A njegova elektrostatička energija je : } W_e = \frac{1}{2} U_{AC}^2 C = 20,79 \mu\text{J}.$$

Zadatak 30. Dva paralelna pravolinijska beskonačno duga provodnika na međusobnom rastojanju $d = 1\text{m}$ nalaze se u vazduhu. Struje u njima su $I_1 = I_2 = 1\text{A}$. Odrediti podužne sile na ove provodnike ako su struje istog smera.



Sl.32

Rešenje:



Sl.32.a

Indukcija koja potiče od struje I_1 na mestu drugog provodnika data je izrazom

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}.$$

Tada je elektromagnetna sila na drugi provodnik

$$F_{12} = I_2 l B_{12} = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}, \text{ tj.}$$

$$F'_{12} = \frac{F_{12}}{l} = I_1 I_2 l \frac{\mu_0}{2\pi d} = 0.1 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}},$$

Indukcija koja potiče od struje I_2 na mestu prvog provodnika je

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d},$$

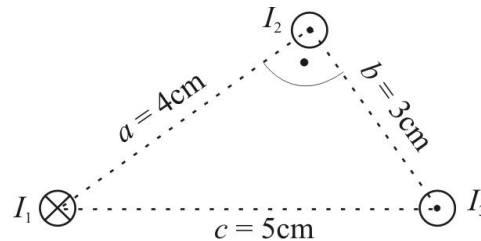
pa je elektromagnetna sila na prvi provodnik

$$F_{21} = I_1 l B_{21} = I_1 l \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}, \text{ tj.}$$

$$F_{21}' = \frac{F_{21}}{l} = I_1 I_2 l \frac{\mu_0}{2\pi d} = 0.1 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}},$$

$$\Rightarrow F_{12}' = F_{21}' = 0.1 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}}.$$

Zadatak 31. Na slici su prikazana tri beskonačno duga pravolinijska provodnika sa strujama $I_1 = 100\text{A}$, $I_2 = 150\text{A}$ i $I_3 = 300\text{A}$. Odrediti intenzitet vektora elektromagnetne sile kojom provodnici sa strujama I_1 i I_3 deluju na dužinu od $l = 1\text{m}$ provodnika sa strujom I_2 .



Sl.33

Rešenje:

$$F = I_2 l B = I_2 l \sqrt{\left(\mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}\right)^2 + \left(\mu_0 \frac{I_3}{2\pi b}\right)^2},$$

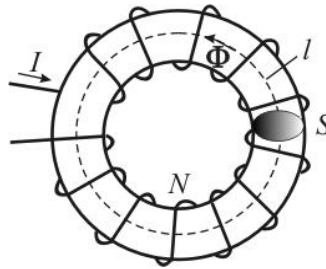
$$F = 0.31\text{N}.$$

Zadatak 32. Na torusu od feromagnetnog materijala poprečnog preseka $S = 1.5\text{cm}^2$ i srednje dužine $l = 40\text{cm}$ namotano je $N = 400$ zavojava žice. Jačina struje u navoju je $I = 40\text{mA}$ a magnetni fluks $\Phi = 3 \mu\text{Wb}$.

Izračunati:

- intenzitet vektora magnetne indukcije \vec{B}
- jačinu magnetnog polja \vec{H}
- magnetnu permeabilnost jezgra μ

relativnu magnetnu permeabilnost μ_r .



Sl.34

Rešenje:

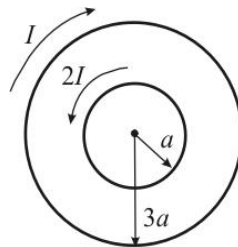
$$a) B = \frac{\Phi}{S} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T};$$

$$b) H = \frac{NI}{l} = 40 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

$$c) \mu = \frac{B}{H} = 500 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}};$$

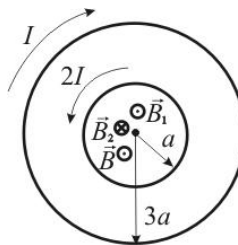
$$d) \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 398.$$

Zadatak 33. Dve koncentrične strujne konture leže u istoj ravni u vazduhu kao na slici. Odrediti intenzitet vektora magnetne indukcije \vec{B} u centru sistema.



Sl.35

Rešenje:



Sl.35.a

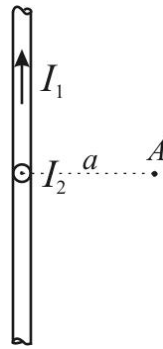
$$B_1 = \mu_0 \frac{2I}{2a} = \mu_0 \frac{I}{a},$$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I}{2 \cdot 3a} = \mu_0 \frac{I}{6a},$$

$$B = B_1 - B_2 = \mu_0 \frac{I}{a} - \mu_0 \frac{I}{6a},$$

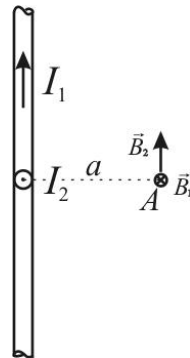
$$B = \frac{5}{6} \mu_0 \frac{I}{a}.$$

Zadatak 34. Dva beskonačno duga pravolinijska provodnika sa strujama I_1 i I_2 u naznačenim smerovima kao na slici ukrštaju se pod pravim uglom. Odrediti intenzitet rezultante vektora magnetne indukcije \vec{B} u tački A ako su $I_1 = 100 \text{ A}$, $I_2 = 50 \text{ A}$ i $a = 20 \text{ cm}$.



Sl.36

Rešenje:



Sl.36.a

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2},$$

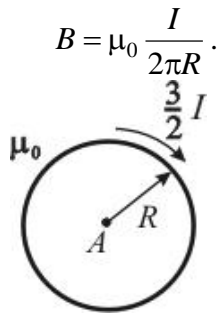
$$B = \sqrt{\left(\mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}\right)^2 + \left(\mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}\right)^2},$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi a} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 112 \mu \text{ T}.$$

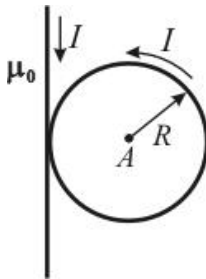
Zadatak 35. Odrediti intenzitete vektora magnetne indukcije \vec{B} u tački A kontura prikazanim na slikama.

Rešenje:

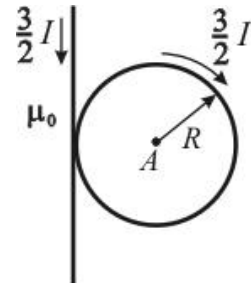
Izraz za intenzitet vektora magnetske indukcije u centru kružne konture poluprečnika R je $B = \mu_0 \frac{I}{2R}$ a u okolini beskonačno dugog pravolinijskog provodnika



Sl.37.a



Sl. 37.b



Sl. 37.c

$$B = \mu_0 \frac{\frac{3}{2}I}{2R} = \mu_0 \frac{3I}{4R};$$

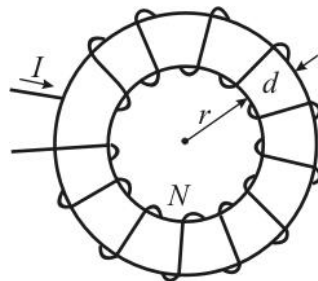
$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} + \mu_0 \frac{I}{2R} = \mu_0 \frac{I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right)$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R\pi} (\pi + 1);$$

$$B = \mu_0 \frac{\frac{3}{2}I}{2R} - \mu_0 \frac{\frac{3}{2}I}{2\pi R} = \frac{3}{4} \mu_0 \frac{I}{R} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right)$$

$$B = \frac{3\mu_0 I}{4\pi R} (\pi - 1);$$

Zadatak 36. Odrediti intenzitet vektora magnetne indukcije \vec{B} u torusnom jezgru ($r=5\text{cm}$, $d=2\text{cm}$) od feromagnetnog materijala ($\mu_r=1000$) koju stvara struja $I=100\text{mA}$ u navoju sa $N=500$ zavoja.



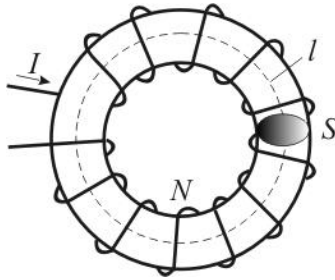
Sl.38

Rešenje:

$$l_{sr} = 2\pi\left(r + \frac{d}{2}\right) = 12\pi \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l_{sr}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot \frac{500 \cdot 1}{12\pi \cdot 10^{-2}} = 0.1667 \text{ T}.$$

Zadatak 37. Na tanak torusni namotaj površine poprečnog preseka S i dužine srednje linije l namotano je N zavojava žice. Magnetna permeabilnost sredine je μ_0 . Odrediti izraz za magnetnu energiju u torusu ako je u namotaju uspostavljena struja I .



Sl.39

Rešenje:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l},$$

$$\Phi' = \mu_0 \frac{NI}{l} S \text{ - fluks kroz jedan namotaj,}$$

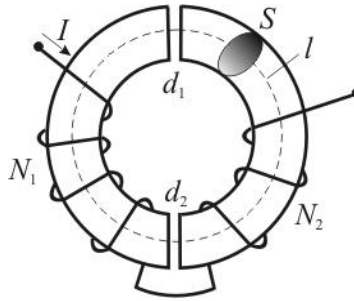
$$\Phi = N\Phi' = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S \text{ - fluks kroz ceo navoj,}$$

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S,$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{2l}.$$

Zadatak 38. Torus od feromagnetnog materijala velike permeabilnosti ($\mu \rightarrow \infty$) ima dva vazдушna procepa d_1 i d_2 . Površina poprečnog preseka torusa je S a dužina srednje linije l . Na torus su ravnomerno i gusto namotana dva namotaja sa N_1 i N_2 zavojava i vezana prema slici. Odrediti induktivnost združenog namotaja torusa.



Sl.40

Rešenje:

$$Hl + H_0 d_1 + H_0 d_2 = N_1 I - N_2 I,$$

$$\frac{B}{\mu} l + \frac{B}{\mu_0} d_1 + \frac{B}{\mu_0} d_2 = (N_1 - N_2) I,$$

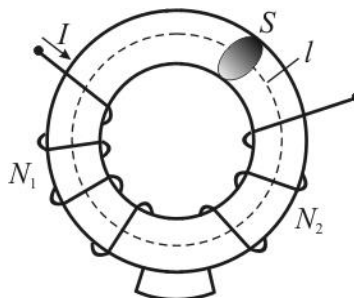
$$\frac{B}{\mu_0} (d_1 + d_2) = (N_1 - N_2) I,$$

$$B = \mu_0 \frac{N_1 - N_2}{d_1 + d_2} I,$$

$$L = (N_1 - N_2) \frac{BS}{I},$$

$$L = \mu_0 (N_1 - N_2)^2 \frac{S}{d_1 + d_2}.$$

Zadatak 39. Na tankom torusu od kartona namotana su ravnomerno i gusto dva namotaja po celoj dužini torusa. Prvi namotaj ima N_1 a drugi N_2 zavojava. Površina poprečnog preseka torusa je S a dužina srednje linije je l . Namotaji su međusobno povezani kao na slici i u njima je uspostavljena stalna struja I . Kolika je ukupna magnetna energija torusa?.



Sl.41

Rešenje:

$$L_1 = N_1^2 \mu_0 \frac{S}{l}; \quad L_2 = N_2^2 \mu_0 \frac{S}{l};$$

$$k = -1; \quad L_{12} = k \sqrt{L_1 L_2} = -N_1 N_2 \mu_0 \frac{S}{l},$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} L_1 I^2 + L_{12} I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 = \\ &= \frac{1}{2} N_1^2 \mu_0 \frac{S}{l} I^2 - N_1 N_2 \mu_0 \frac{S}{l} I^2 + \frac{1}{2} N_2^2 \mu_0 \frac{S}{l} I^2 = W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{S}{l} I^2 (N_1 - N_2)^2. \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{S}{l} I^2 (N_1^2 - 2N_1 N_2 + N_2^2) \end{aligned}$$

Zadatak 40. Dat je torus kružnog poprečnog preseka poluprečnika r na kojem je namotan provodnik nepoznate dužine l_p . Materijal od kojeg je načinjen torus ima relativnu permeabilnost $\mu_r = 1200$. Dužina srednje linije torusa je $l = 80 \text{ cm}$ a njegova induktivnost $L = 2 \text{ H}$. Odrediti dužinu provodnika l_p .

Rešenje:

$$L = \frac{\Phi}{I}, \quad \Phi = N \Phi_1,$$

$$L = \frac{N \Phi_1}{I}, \quad \Phi_1 = BS,$$

$$L = \frac{NBS}{I}, \quad B = \mu \frac{NI}{l},$$

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l}, \quad S = r^2 \pi,$$

$$L = \mu \frac{N^2}{l} r^2 \pi, \quad l_p = 2r\pi N,$$

$$L = \mu \frac{N^2}{l} \left(\frac{l_p}{2N\pi} \right)^2 \pi = \mu \frac{l_p^2}{4l\pi},$$

$$l_p = \sqrt{\frac{4l\pi L}{\mu_0 \mu_r}} = 115 \text{ m}.$$

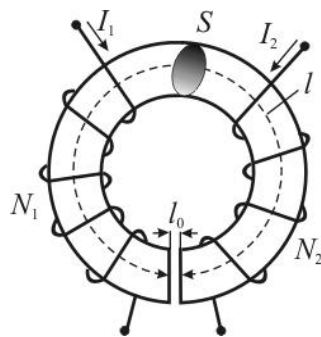
Zadatak 41. Odrediti širinu vazdušnog procepa elektromagneta površine poprečnog preseka $S = 48 \text{ cm}^2$ ako je u tom procepu magnetna energija 5 J pri magnetnoj indukciji $B = 1.2 \text{ T}$. Rasipanje zanemariti

Rešenje:

$$W_m = \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} l_0 S,$$

$$l_0 = \frac{2\mu_0 W_m}{B^2 S} = 1,8 \text{ mm}.$$

Zadatak 42. Torusno jezgro od feromagnetnog materijala ima vazdušni procep dužine l_0 . Kriva magnećenja materijala od kojeg je jezgro načinjeno data je tabelom. Odrediti magnetopobudnu silu drugog namotaja $N_2 I_2$ da bi u jezgru magnetni fluks iznosio $\Phi = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$. Zbog magnetnog rasipanja indukcija u vazдушnom procepu je 10% manje vrednosti od indukcije u jezgru. Ostali podaci: $l = 20 \text{ cm}$, $l_0 = 2 \text{ mm}$, $S = 4 \text{ cm}^2$, $N_1 I_1 = 400 \text{ A}$.



Sl.42

$B(\text{T})$	0.4	0.65	0.82	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4
$H(\frac{\text{A}}{\text{m}})$	100	150	200	240	300	380	500	750	1200

Rešenje:

$$B = \frac{\Phi}{S} = 1 \text{ T iz tabele} \Rightarrow H = 300 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

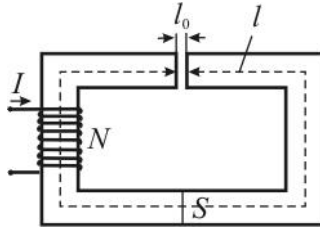
$$B_0 = 0.9B = 0.9 \text{ T} \Rightarrow H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 716.2 \frac{\text{kA}}{\text{m}},$$

$$Hl + H_0 l_0 = N_1 I_1 + N_2 I_2,$$

$$N_2 I_2 = Hl + H_0 l_0 - N_1 I_1 = 1092 \text{ A zavojaka}$$

Zadatak 43. Za dato magnetno kolo sa vazдушnim procepom prikazanom na slici, odrediti intenzitet vektora magnetne indukcije u procepu, B_0 . Poznato je l_0 , S_0 , l , S i

magnetopobudna sila NI . Smatrati da je magnetna permeabilnost jezgra beskonačna ($\mu \rightarrow \infty$).



SI.43

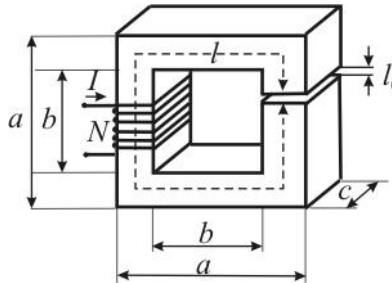
Rešenje:

$$\Phi = \frac{NI}{R_{m0} + R_{mFe}} = \frac{NI}{\frac{l_0}{\mu_0 S_0} + \frac{l}{\mu S}}$$

pa je,

$$\Phi = \frac{\mu_0 S_0 NI}{l_0} = B_0 S_0 \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 NI}{l_0}.$$

Zadatak 44. Odrediti intenzitet vektora magnetne indukcije, B , u magnetnom kolu sa slike ako je: $a = 10\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, $c = 2\text{cm}$, $\mu_r = 1000$, $l_0 = 1\text{mm}$, $I = 1\text{A}$ i $N = 100$.



SI.44

Rešenje:

$$l = \left(\frac{a-b}{2} + b\right) \cdot 4 - l_0 = 319\text{ mm},$$

$$S = \frac{a-b}{2} \cdot c = 4\text{ cm}^2,$$

$$\Phi = \frac{NI}{R_{mFe} + R_{m0}},$$

$$R_{mFe} = \frac{1}{\mu_{Fe}} \frac{l}{S} = 634.630 \text{ jed. SI, } \left(\frac{1}{H}\right)$$

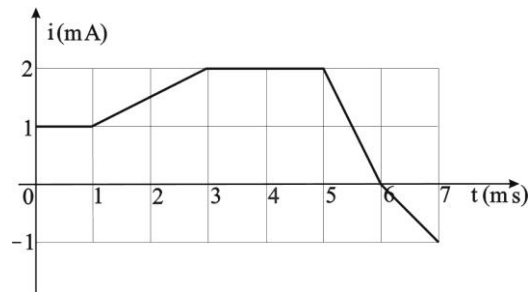
$$R_{m0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{l_0}{S} = 1.989.437 \text{ jed. SI,}$$

$$R_m = R_{mFe} + R_{m0} = 2.624.067 \text{ jed SI,}$$

$$\Phi = 38.1 \cdot 10^{-6} \text{ Wb,}$$

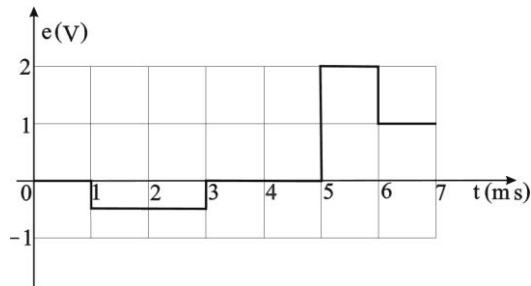
$$B = \frac{\Phi}{S} = 0.095 \text{ T.}$$

Zadatak 45. Na priloženom dijagramu (slika ispod) nacrtati grafik indukovane elektromotorne sile e u navoju induktivnosti $L=1\text{H}$ ako se struja u namotaju menja prema dijagramu (slika gore).



Sl.45

Rešenje:



Sl.45.a

$$e = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$(0:1)\text{s} \quad e = -1 \frac{1-1}{1} = 0,$$

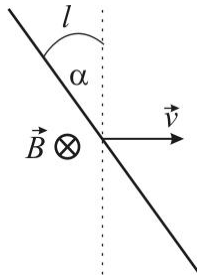
$$(1:3)\text{s} \quad e = -1 \frac{2-1}{2} = -0.5,$$

$$(3:5)\text{s} \quad e = -1 \frac{2-2}{2} = 0,$$

$$(5:6)s \quad e = -1 \frac{0-2}{2} = 2,$$

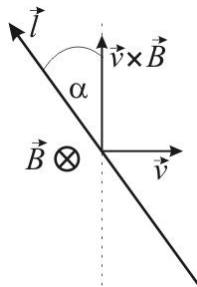
$$(6:7)s \quad e = -1 \frac{-1-0}{1} = 1.$$

Zadatak 46. Pravolinijski provodnik dužine $l=25\text{cm}$, kreće se kroz homogeno magnetno polje indukcije $B=0.2\text{T}$, konstantnom brzinom $v=10\text{m/s}$. Pravci brzine kretanja provodnika i magnetnog polja dati su na slici. Odrediti intenzitet i smer indukovane elektromotorne sile.



S1.46

Rešenje:

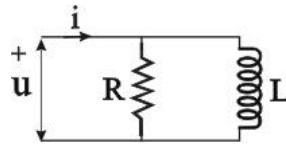


S1.46.a

$$e = \vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = l v B \sin^2(\vec{v}, \vec{B}) \cos(\vec{l}, \vec{v} \times \vec{B}) = l v B \cos \alpha$$

Usvojeni referentni smer za \vec{l} , je i smer indukovane elektromotorne sile, e .

Zadatak. 47 Napon na krajevima kola prostoperiodične struje menja se po zakonu $u = 179 \sin 156t$ [V]. Odrediti trenutnu vrednost rezultantne struje i . Brojni podaci: $R = 10 \Omega$, $L = 20.2 \text{ mH}$.



Sl.47

Rešenje:

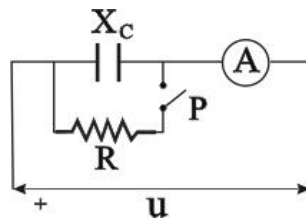
$$\begin{aligned} \omega &= 156 \text{ rad/s}, \\ X_L &= \omega L = 3.15 \Omega, \\ \underline{Z}_e &= \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = (0.90 + j2.86) \Omega, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{179/\sqrt{2}}{0.90 + j2.86} = (12.67 - j40.27) \text{ A}, \\ I &= \sqrt{12.67^2 + 40.26^2} = 42.21 \text{ A}, \\ \psi &= \arctg \frac{-40.26}{12.67} = -72.53^\circ = -\frac{72.53}{180} \cdot \pi = -0.4 \cdot \pi \text{ rad}, \\ i(t) &= 42.21\sqrt{2} \sin(156t - 0.4\pi) \text{ A}. \end{aligned}$$

Zadatak. 48 Redno RL kolo prostoperiodične struje treba zameniti ekvivalentnim paralelnim kolom. Odrediti R_p i X_{Lp} , ako je $R_r = 7.2 \Omega$ i $X_{Lr} = 9.6 \Omega$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_r &= \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{7.2 + j9.6} = (0.050 - j0.066) \text{ S}, \\ \underline{Y}_p &= \underline{Y}_r = (0.050 - j0.066) \Omega, \\ \underline{Y}_p &= \underline{Y}_{R_p} + \underline{Y}_{X_{Lp}}, \\ \underline{Y}_{R_p} &= \frac{1}{R_p}, \\ \underline{Y}_{X_{Lp}} &= \frac{1}{jX_{Lp}} = -j \frac{1}{X_{Lp}}, \\ R_p &= \frac{1}{0.050} = 20 \Omega, \\ X_{Lp} &= \frac{1}{0.066} = 15 \Omega. \end{aligned}$$

Zadatak. 49 Koliko će iznositi struja I_1 kroz ampermetar posle zatvaranja prekidača P, ako je pre zatvaranja prekidača struja u kolu prostoperiodične struje iznosila I , a $R = X_C$, $U = \text{const}$.



Sl.48

Rešenje:

$$\text{P otvoren: } I = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{R},$$

$$\text{P zatvoren: } I_1 = \frac{U}{Z_e}.$$

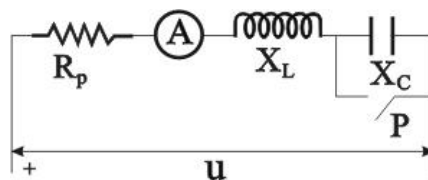
$$\underline{Z}_e = \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{R}{2}(1 - j),$$

$$Z_e = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

$$I_1 = \frac{U}{R\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}U}{R},$$

$$I_1 = \sqrt{2} \cdot I.$$

Zadatak. 50 U kolu prostoperiodične struje na slici pokazivanje ampermetra je isto, pri otvorenom i pri zatvorenom prekidaču, ako je $R = 8 \Omega$, $X_L = 6 \Omega$. Koliko je X_C ?



Sl.49

Rešenje:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1}, \text{ kada je P otvoren } \Rightarrow I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2}, \text{ kada je P zatvoren } \Rightarrow I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L)^2}},$$

$$I_1 = I_2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L)^2}.$$

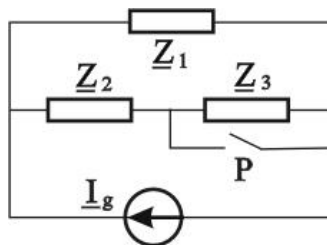
Kvadriranjem leve i desne strane dobija se

$$R^2 + (X_L - X_C)^2 = R^2 + X_L^2, \text{ tj.}$$

$$X_C(X_C - 2X_L) = 0,$$

$$X_C = 0, X_C = 2X_L = 12 \Omega.$$

Zadatak. 51 . Za kolo prostoperiodične struje na slici odrediti struju kroz Z_2 kada se zatvori prekidač ako je struja I_1 pri otvorenom prekidaču $I_{10} = j10 \text{ A}$, a važi da je $Z_1 = Z_2 = Z_3 = (10 + j10) \Omega$.



Sl.50

Rešenje:

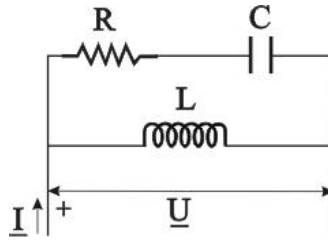
Korišćenjem strujnog razdelnika kada je prekidač P otvoren dobija se

$$I_{10} = I_g \frac{(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = I_g \frac{2Z_1}{3Z_1} = \frac{2}{3} I_g \Rightarrow I_g = \frac{3}{2} I_{10} = j15 \text{ A},$$

a kada je prekidač P zatvoren

$$I_{2z} = I_g \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{I_g}{2} = j7.5 \text{ A}.$$

Zadatak. 52 . Za kolo naizmenične struje prikazano na slici poznato je $X_L = 100 \Omega$, $R = 16 \Omega$, $X_C = 12 \Omega$ i $U_C = 24 \text{ V}$. Izračunati efektivnu vrednost struje I .



S1.51

Rešenje:

$$I_1 = \frac{U_C}{X_C} = 2 \text{ A},$$

$$\underline{Z} = \frac{jX_L(R - jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} = (20 - j10) \Omega,$$

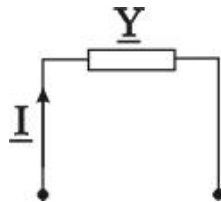
$$Z = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5} \Omega,$$

$$\underline{U} = \underline{I}_1(R - jX_C) \Rightarrow U = I_1\sqrt{R^2 + X_C^2} = 40 \text{ V},$$

$$I = \frac{U}{Z},$$

$$I = \frac{4}{\sqrt{5}} = 0.8\sqrt{5} \text{ A}.$$

Zadatak. 53 U prijemniku admitanse $\underline{Y} = 25(\sqrt{3} - j) \text{ mS}$ poznata je struja $\underline{I} = (-\sqrt{3} + j) \text{ A}$ i maksimalna magnetna energija kalema $W_m = \frac{10}{\pi} \text{ mJ}$. Kolika je kružna učestanost ω ?



S1.52

Rešenje:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{25(\sqrt{3} - j)} = 10(\sqrt{3} + j) \Omega,$$

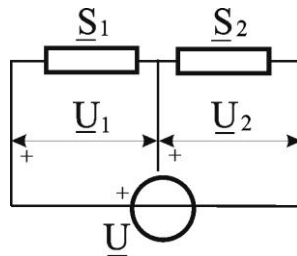
$$\underline{Z} = R + jX = R + j\omega L \Rightarrow X = \omega L = 10 \Omega,$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI_m^2 = \frac{1}{2} L(\sqrt{2}I)^2 = LI^2.$$

Na osnovu (1) i (2) sledi

$$\omega = \frac{XI^2}{W_m} = 4\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}.$$

Zadatak. 54 Prividne snage dva prijemnika su $S_1 = 4 \text{ VA}$ i $S_2 = 10 \text{ VA}$. Napon \underline{U}_1 fazno prednjači struji \underline{I} za $\pi/4$ a napon \underline{U}_2 fazno zaostaje za strujom \underline{I} za $\pi/4$. Reaktivna snaga redne veze ovih prijemnika je

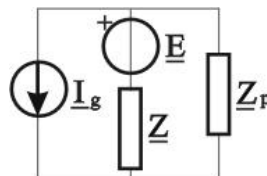


Sl.53

Rešenje:

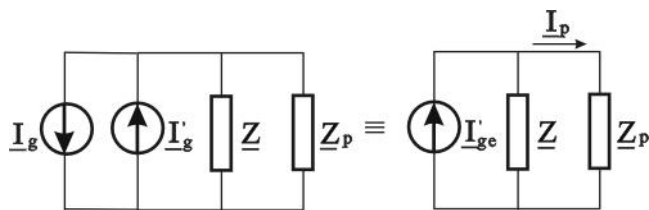
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \pi/4, \quad \varphi_2 = -\pi/4, \\ \underline{S}_1 &= S_1 e^{j\varphi_1} = 4(\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = 2\sqrt{2}(1 + j) \text{ VA}, \\ \underline{S}_2 &= S_2 e^{j\varphi_2} = 10(\cos \pi/4 - j \sin \pi/4) = 5\sqrt{2}(1 - j) \text{ VA}, \\ \underline{S} &= \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (7\sqrt{2} - j3\sqrt{2}) \text{ VAr}, \\ Q &= -3\sqrt{2} \text{ VAr}. \end{aligned}$$

Zadatak. 55 Naći reaktivnu snagu Q_p kola na slici. Brojni podaci: $\underline{I}_g = (0.9 - j1.8) \text{ A}$, $\underline{Z}_p = (90 - j90) \Omega$, $\underline{E} = (14 - j2) \text{ V}$, $\underline{Z} = (10 + j20) \Omega$.



Sl.54

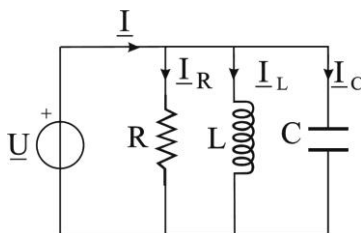
Rešenje:



Sl.54.a

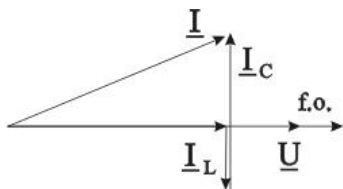
$$\begin{aligned} \underline{I}'_g &= \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{14 - j2}{10 + j20} = (0.2 - j0.6) \text{ A}, \\ \underline{I}_{ge} &= (\underline{I}'_g - \underline{I}_g) = (-0.7 + j1.2) \text{ A}, \\ \underline{I}_p &= \underline{I}_{ge} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_p} = (-0.199 - j0.159) \text{ A}, \\ I_p &= 0.254 \text{ A}, \\ Q_p &= X_p I_p^2 = -90 \cdot 0.254^2 = -5.8 \text{ VAr}. \end{aligned}$$

Zadatak. 56 Za kolo prostopriodične struje prikazano na slici poznato je: $I = 10 \text{ mA}$, $I_R = 6 \text{ mA}$, $I_C = 25 \text{ mA}$. Odrediti efektivnu vrednost struje I_L .



Sl.55

Rešenje:



Sl.55.a

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_R + j(\underline{I}_C - \underline{I}_L), \\ I^2 &= I_R^2 + (I_C - I_L)^2, \\ (I_C - I_L)^2 &= I^2 - I_R^2, \\ I_C - I_L &= \pm \sqrt{I^2 - I_R^2}, \end{aligned}$$

$$I_{L_{1,2}} = I_C \mp \sqrt{I^2 - I_R^2},$$

$$I_{L_{1,2}} = 25 \mp \sqrt{100 - 36},$$

$$I_{L_1} = 33 \text{ mA},$$

$$I_{L_2} = 17 \text{ mA}.$$

Zadatak. 57 Redno rezonantno kolo ima rezonantnu učestanost ω_0 , rednu otpornost R i priključeno je na napon efektivne vrednosti U . Odrediti faktor dobrote kola Q kada je ukupna energija sadržana u magnetnom polju pri rezonanciji jednaka W .

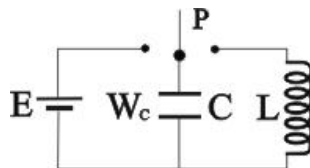
Rešenje:

$$W = \frac{1}{2} L I_m^2 = L I^2 = L \frac{U^2}{R^2},$$

$$L = \frac{R^2 W}{U^2},$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{R W \omega_0}{U^2}.$$

Zadatak. 58 Prethodno napunjen kondenzator ($W_C = \frac{CE^2}{2}$) omogućava da se pri zatvaranju prekidača P kroz LC kolo uspostavi struja $i(\omega_0)$. Izvesti Tompsonov obrazac za sopstvenu kružnu frekvenciju slobodnih oscilacija ω_0 .



S1.56

Rešenje:

$$W_C = W_L,$$

$$E_m = E,$$

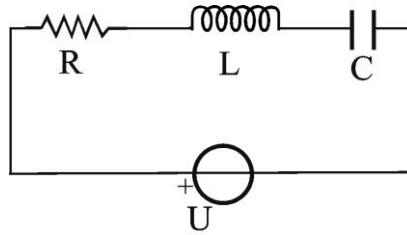
$$\frac{CE_m^2}{2} = \frac{L I_m^2}{2},$$

$$I_m = \frac{E_m}{X_L} = \frac{E_m}{\omega_0 L},$$

$$CE_m^2 = \frac{L E_m^2}{\omega_0^2 L^2},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Zadatak. 59 Zadato je $U_R : U_C = 1 : 100$, $L = 20 \mu\text{H}$, $f_0 = 3.97\text{MHz}$, $I_0 = 1 \text{ mA}$. Strujno kolo je u faznoj rezonanciji. Izračunati R i C .



Sl.57

Rešenje:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2.494 \cdot 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\frac{U_R}{U_C} = \frac{RI_0}{\frac{1}{\omega_0 C} I_0} = RC\omega_0 = \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$RC = \frac{1}{100\omega_0} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$$

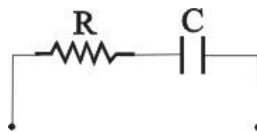
Pri faznoj rezonanciji reaktansa kola je nula, $X = \omega L - 1/\omega C = 0$ pa sledi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 80 \text{ pF},$$

$$R = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{80 \cdot 10^{-12}} = 5 \Omega.$$

Zadatak. 60 Kolo se sastoji od otpornika i kondenzatora u rednoj vezi gde je $\cos\varphi = 0.85$. Koliki je faktor snage prijemnika koji se sastoji od istih elemenata u paralelnoj vezi?

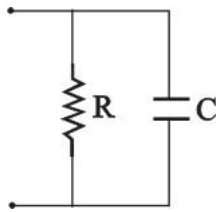


Sl.58

Rešenje:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C},$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} = 0.85.$$

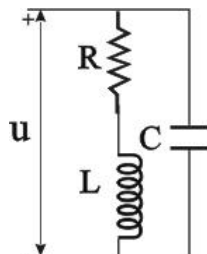


Sl.58.a

$$\underline{Z}' = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + (R\omega C)^2} (1 - jR\omega C),$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi' &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \right)^2} = \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 0.53. \end{aligned}$$

Zadatak. 61 Na mrežu napona 220 V, 50 Hz priključen je prijemnik $\underline{Z} = (4 + j12) \Omega$. Odrediti otpornost kondenzatora X_C priključenog radi potpune kompenzacije reaktivne snage.



Sl.59

Rešenje:

$$\underline{Y}_e = \underline{Y} + \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{-jX_C}$$

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{4+j12} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{40} - j\frac{3X_C-40}{40X_C}$$

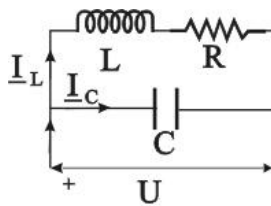
$$\underline{Y}_e = G_e + jB_e$$

Iz uslova: $\cos \varphi_e = 1, \Rightarrow B_e = 0,$

$$3X_C - 40 = 0$$

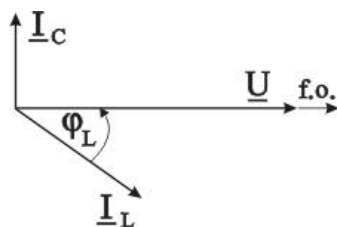
$$X_C = \frac{40}{3} \Omega.$$

Zadatak. 62 Jedan prijemnik uzima iz mreže prividnu snagu S i aktivnu snagu P pri naponu U i učestanosti ω . Odrediti kapacitivnost kondenzatora C priključenog paralelno prijemniku tako da prijemnika iz mreže uzima samo aktivnu snagu

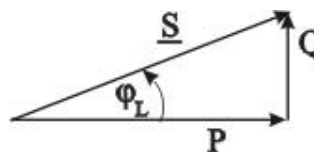


Sl.60

Rešenje:



Sl.60.a



Sl.60.b

Da bi trofazni uslov bio ispunjen potrebno je da reaktivni deo I_L bude jednak reaktivnom delu I_C .

$$I_C = I_L \sin \varphi_L / U,$$

$$I_C U = I_L U \sin \varphi_L,$$

$$I_C = \omega C U, S = I_L U, \text{ pa sledi}$$

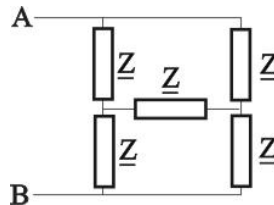
$$U^2 \omega C = S \sin \varphi_L,$$

$$U^2 \omega C = Q,$$

$$\sin \varphi_L = \frac{Q}{S} = \frac{\sqrt{S^2 - P^2}}{S},$$

$$\text{Iz (1) i (2)} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{S^2 - P^2}}{\omega U^2}.$$

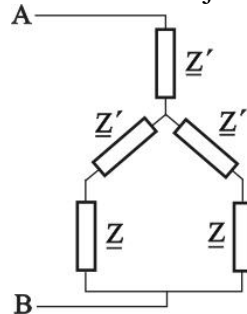
Zadatak. 63 Naći ekvivalentnu impedansu između tačaka A i B u kolu na slici, ako je poznato $\underline{Z} = (1 + j1) \Omega$.



Sl.61

Rešenje:

Transformacijom trougla impedansi u zvezdu dobija se



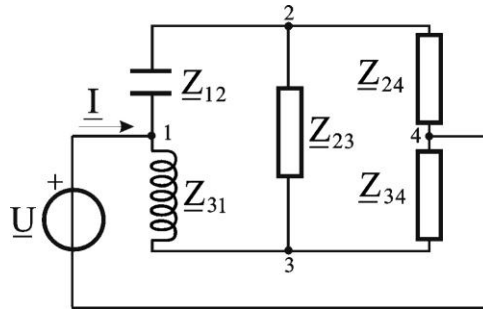
Sl.61.a

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z} + \underline{Z}} = \frac{\underline{Z}}{3},$$

$$\underline{Z}'' = \frac{(\underline{Z}' + \underline{Z})(\underline{Z}' + \underline{Z})}{2(\underline{Z}' + \underline{Z})} = \frac{(\underline{Z}' + \underline{Z})}{2} = \frac{2}{3} \underline{Z},$$

$$\underline{Z}_{\text{ek}} = \underline{Z}' + \underline{Z}'' = \underline{Z} = (1 + j) \Omega.$$

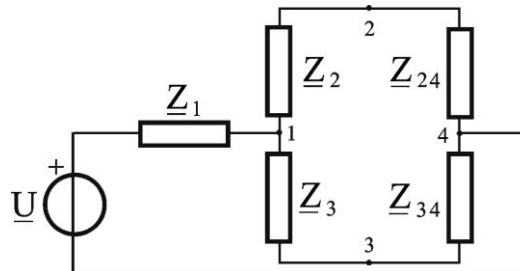
Zadatak. 64 Naći struju \underline{I} u kolu prostoperiodične struje na slici. Brojni podaci: $\underline{Z}_{12} = -j3 \Omega$; $\underline{Z}_{24} = (3 + j4) \Omega$; $\underline{Z}_{23} = 4 \Omega$; $\underline{Z}_{31} = j3 \Omega$; $\underline{Z}_{34} = (4 - j3) \Omega$; $\underline{U} = 30 \text{ V}$.



Sl.62

Rešenje:

Transformacijom trougla impedansi između tačaka 1, 2 i 3, u zvezdu, dobija se



Sl.62.a

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = 2.25 \Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = -j3 \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = j3 \Omega,$$

$$\underline{Z}' = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{24} = (3 + j) \Omega,$$

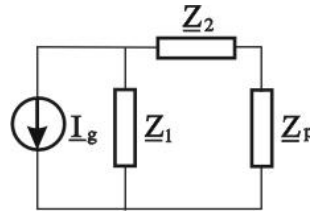
$$\underline{Z}'' = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{34} = 4 \Omega,$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}'\underline{Z}''}{\underline{Z}' + \underline{Z}''} = (4.04 + j0.32) \Omega,$$

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_e} = \frac{30}{4.01 + j0.32} \Rightarrow \underline{I} = (7.434 - j0.593) \text{ A}.$$

Zadatak. 65 U kolu prostoperiodične struje sa slike poznato je $\underline{I}_g = 4 \text{ mA}$, $\underline{Z}_1 = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_2 = (20 - j30) \Omega$. Kolika treba da bude kompleksna impedansa

prijemnika \underline{Z}_p da bi aktivna snaga koju prima taj prijemnik bila maksimalna? Kolika je ta maksimalna snaga?



S1.63

Rešenje:

U odnosu na prijemnik, ostatak kola se može zameniti Thevenenovim generatorom. Elektromotorna sila ovog generatora jednaka je naponu praznog hoda dela kola levo od prijemnika, pa je

$$\underline{E}_T = \underline{U}_{AB}' = \underline{Z}_1 \underline{I}_g = 80(1 + j) \text{ mV},$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (40 - j10) \Omega.$$

Po teoremi o prilagođenju prijemnika po snazi, aktivna snaga prijemnika je maksimalna kada je

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_T^* = (40 + j10) \Omega.$$

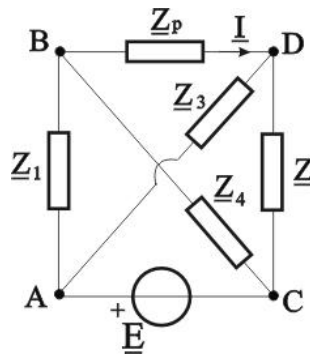
Ta snaga iznosi

$$(P_p)_{\max} = \frac{|\underline{E}_T|^2}{4R_T} = 80 \mu\text{W},$$

gde je

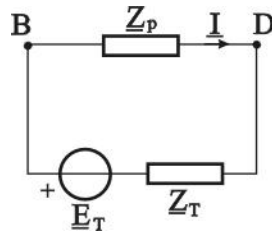
$$R_T = \text{Re}\{\underline{Z}_T\} = 40 \Omega.$$

Zadatak. 66 Primenom Thevenenove teoreme odrediti struju \underline{I} u kolu prostoperiodične struje na slici. Brojni podaci: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10 \Omega$, $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = j5 \Omega$, $\underline{Z}_p = (1 - j3) \Omega$, $\underline{E} = (30 - j10)\text{V}$.

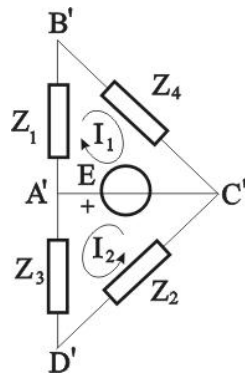


S1.64

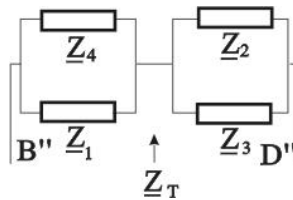
Rešenje:



Sl.64.a



Sl.64.b



Sl.64.c

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_T},$$

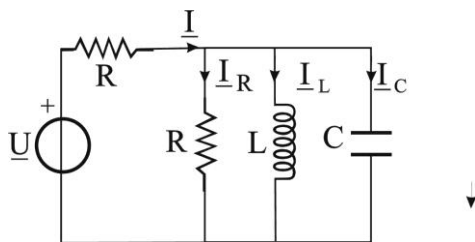
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} = \frac{30 - j10}{10 + j5} = (2 - j2)\text{A},$$

$$\underline{E}_T = \underline{U}'_{BD} = \underline{Z}_3 \underline{I}_2 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = (-10 + j30)\text{V},$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}'_{BD} = 2 \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} = (4 + j8) \Omega,$$

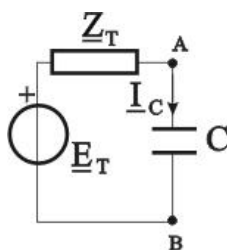
$$\underline{I} = \frac{-10 + j30}{4 + j8 + 1 - j3} = (2 + j4)\text{A}.$$

Zadatak. 67 Koristeći Tevenenovu teoremu odrediti struju \underline{I}_c . Poznato je ω , R , L , C i poznata je struja kroz kalem kada je grana sa kondenzatorom isključena, \underline{I}'_L .

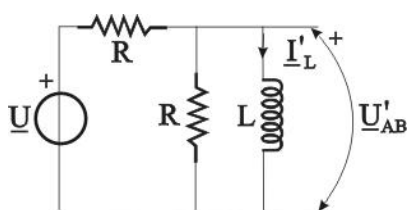


Sl.65

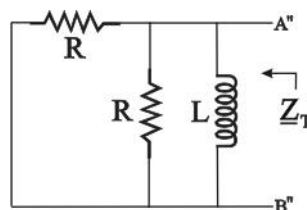
Rešenje:



Sl.65.a



Sl.65.b



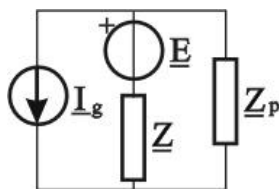
Sl.65.c

$$\underline{E}_T = \underline{U}'_{AB} = j\omega L \underline{I}'_L,$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\frac{R}{2} j\omega L}{\frac{R}{2} + j\omega L} = \frac{j\omega LR}{R + 2j\omega L},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\omega^2 LC(R + 2j\omega L) \underline{I}'_L}{\omega^2 RLC - R - 2j\omega L}.$$

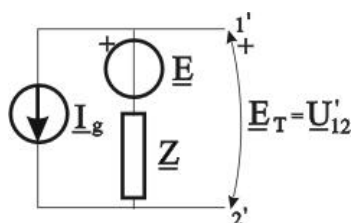
Zadatak. 68 Za kolo prostoperiodične struje na slici poznati su: $\underline{I}_g = 0.9 \cdot (1 - j2) \text{ A}$, $\underline{E} = (14 - j2) \text{ V}$, $\underline{Z} = (10 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_p = (90 - j20) \Omega$. Odrediti aktivnu snagu prijemnika \underline{Z}_p



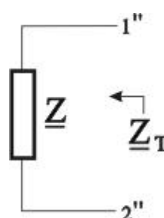
Sl.66

Rešenje:

Primenom Tevenenove teoreme dobija se



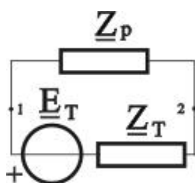
Sl.66.a



Sl.66.b

$$\underline{E}_T = \underline{U}'_{12} = -\underline{Z}I_g + \underline{E} = (-31 - j2) \text{ V},$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z} = (10 + j20) \Omega,$$



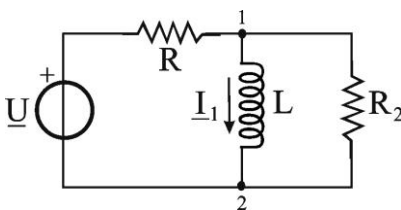
Sl.66.c

$$\underline{I}_p = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_p} = (-0.31 - j0.02) \text{ A},$$

$$I_p^2 = 0.31^2 + 0.02^2 = 0.0965 \text{ A}^2,$$

$$P = R_p I_p^2 = 8.685 \text{ W}.$$

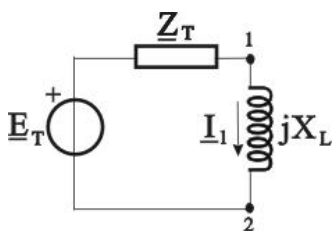
Zadatak. 69 Za kolo prostoperiodične struje sa slike važi: $R = 5 \Omega$ i $X_L = 4 \Omega$.
Odrediti otpornost R_2 pri kojoj je fazna razlika napona \underline{U} i struje \underline{I}_1 jednaka $\pi/4$.



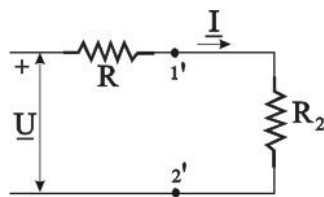
Sl.67.

Rešenje:

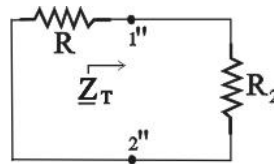
I_1 se može odrediti primenom Tevenenove teoreme:



Sl.67.a



Sl.67.b



Sl.67.c

$$\underline{E}_T = \underline{U}_{12} = \underline{I} \cdot R_2,$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + R_2},$$

$$\underline{E}_T = \frac{\underline{U}}{R + R_2} \cdot R_2,$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{12} = \frac{R \cdot R_2}{R + R_2},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + jX_L} = \frac{\underline{U}R_2}{RR_2 + jX_L(R + R_2)},$$

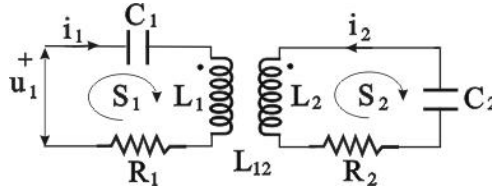
$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = R + jX_L \frac{(R + R_2)}{R_2},$$

$$\arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}_1}\right) = \arctg\left[\frac{X_L(R + R_2)}{RR_2}\right] = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{X_L(R+R_2)}{RR_2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$R_2 = \frac{X_L R}{R - X_L} = 20 \Omega.$$

Zadatak. 70 Za data induktivno spregnuta kola prostoperiodične struje napisati opšte jednačine i izvesti ulaznu impedansu sistema \underline{Z}_{ul} .



Sl.68

Rešenje:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}),$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}),$$

$$\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 I_1 + \underline{Z}_{12} I_2, \quad (1)$$

$$0 = \underline{Z}_{12} I_1 + \underline{Z}_2 I_2. \quad (2)$$

Iz jednačine (2) se dobija

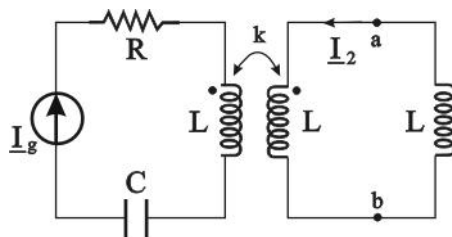
$$I_2 = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_2} I_1, \quad (3)$$

kada relaciju (3) uvrstimo u jednačinu (1) sledi

$$\underline{U}_1 = (\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2}) I_1, \text{ pa je}$$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_1}{I_1} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2}.$$

Zadatak. 71 Za električno kolo prostoperiodične struje prikazano na slici poznata je efektivna vrednost struje strujnog generatora I_g i kružna učestanost ω . Kolika je efektivna vrednost napona U_{ab} na krajevima otvorenog sekundarnog kola.



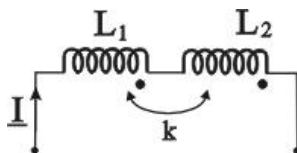
S1.69

Rešenje:

$$\underline{U}_{ab} = \cancel{j\omega L_2 I_2}^0 \pm jk\omega\sqrt{L_1 L_2} I_g,$$

$$U_{ab} = k\omega\sqrt{L_1 L_2} I_g.$$

Zadatak. 72 Kolika je energija magnetnog polja dva induktivno spregnuta kalema čije su induktivnosti L_1 i L_2 , a apsolutna vrednost međusobne induktivnosti L_{12} . Jačina struje u oba kalema su iste, I .



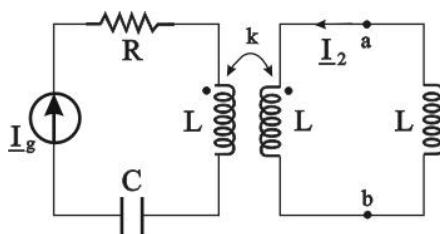
S1.70

Rešenje:

$$L_e = L_1 + L_2 + 2L_{12} = L_1 + L_2 + 2k\sqrt{L_1 L_2},$$

$$W_m = \frac{1}{2} L_e I^2 = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 + 2k\sqrt{L_1 L_2}) I^2.$$

Zadatak. 73 Za električno kolo prostoperiodične struje prikazano na slici poznato je I_g , ω , k , L . Kolika je efektivna vrednost napona U_{ab} ?



S1.71

Rešenje:

$$L_{12} = k\sqrt{L^2} = kL$$

(Zadatak 1)

$$\underline{U}_{ab} = j\omega L \underline{I}_2$$

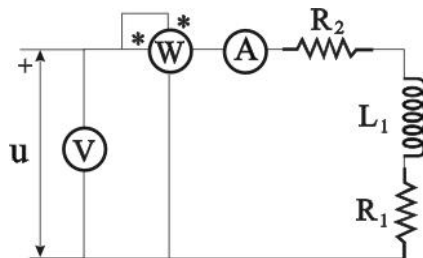
$$j\omega L \underline{I}_2 + j\omega L_{12} \underline{I}_g + j\omega L \underline{I}_2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Iz (1) i (2) sledi } \underline{I}_2 = -\frac{k}{2} \underline{I}_g,$$

$$\underline{U}_{ab} = j\omega L \left(-\frac{k}{2} \underline{I}_g\right),$$

$$U_{ab} = \frac{k\omega L I_g}{2}.$$

Zadatak. 74 Na krajevima kola prostoperiodične struje koje sadrži rednu vezu otpornika otpornosti $R_2 = 22 \Omega$ i realnog kalema čiji parametri L_1 i R_1 priključen je prostoperiodičan napon frekvencije 50 Hz. Ampermetar pokazuje 5 A, voltmetar 220 V a vatmetar 940 W. Odrediti vrednosti L_1 i R_1 .



S1.72

Rešenje:

$$P = (R_1 + R_2) I^2$$

$$R_1 = \frac{P}{I^2} - R_2 = 15.6 \Omega$$

$$Z = \frac{U}{I} = 44 \Omega$$

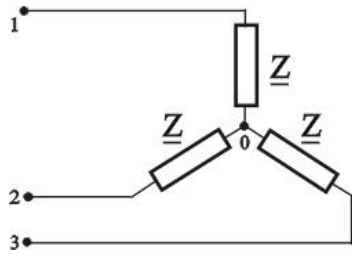
$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}$$

$$X_1 = \sqrt{Z^2 - (R_1 + R_2)^2} = 22.8 \Omega$$

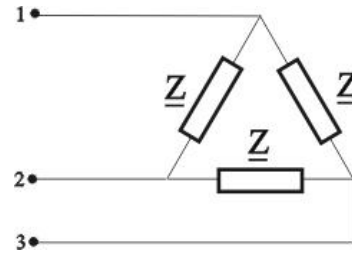
$$L_1 = \frac{X_1}{\omega} = \frac{X_1}{2\pi f} = 73 \text{ mH}.$$

Zadatak. 75 Trofazni prijemnik je vezan u zvezdu (trougao) i priključen na mrežu simetričnog direktnog sistema linijskih napona efektivnih vrednosti $U_1 = 380 \text{ V}$ kao na

slici. Pod ovim okolnostima kompleksna impedansa jedne faze prijemnika je $\underline{Z} = (5 + j6) \Omega$.



Sl.73.a



Sl.73.b

Odrediti: a) Kompleksne struje faza prijemnika; b) Kompleksne snage prijemnika

Rešenje:

a) Kompleksni izrazi za linijske napone datog trofaznog sistema su:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= U_1 e^{j0} = 380 \text{ V} , \\ \underline{U}_{23} &= U_1 e^{-j2\pi/3} = 380 e^{-j2\pi/3} \text{ V} = 190(-1 - j\sqrt{3}) \text{ V} , \\ \underline{U}_{31} &= U_1 e^{-j4\pi/3} = 380 e^{-j4\pi/3} \text{ V} = 190(-1 + j\sqrt{3}) \text{ V} . \end{aligned}$$

Kompleksni izrazi za linijske napone faza prijemnika vezanih u zvezdu su:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{10} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = 110 \cdot (\sqrt{3} - j) \text{ V} , \\ \underline{U}_{20} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = 110 \cdot (-\sqrt{3} - j) \text{ V} , \\ \underline{U}_{30} &= \frac{\underline{U}_{31}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = j220 \text{ V} . \end{aligned}$$

Kompleksni izrazi za napone faza prijemnika vezanih u trougao su jednaki kompleksnim izrazima za linijske napone datog sistema.

Kompleksne struje faza prijemnika vezanih u zvezdu su:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{10} &= \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}} = (4.797 - j27.756) \text{ A} , \\ \underline{I}_{20} &= \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}} = (-26.436 + j9.723) \text{ A} , \\ \underline{I}_{30} &= \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}} = (21.639 + j18.032) \text{ A} . \end{aligned}$$

Kompleksne struje za vezu faznih namotaja u trougao su:

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = (16.794 + j45.657) \text{ A} ,$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = (31.147 - j37.377) \text{ A},$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = (-47.931 - j8.285) \text{ A}$$

Kompleksne snage pojedinih faza prijemnika vezanih u zvezdu su:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_{10} \underline{I}_{10}^* = (3.967 + j4.760) \text{ kVA},$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{20} \underline{I}_{20}^* = (3.967 + j4.760) \text{ kVA},$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{30} \underline{I}_{30}^* = (3.967 + j4.760) \text{ kVA}.$$

Vidi se da kod uravnoteženog trofaznog kola kompleksne snage faza prijemnika su međusobno jednake. Kompleksna snaga trofaznog prijemnika je

$$\underline{S}_{\Sigma} = 3\underline{S}_1 = (11.901 + j14.280) \text{ kVA}.$$

Za prijemnik vezan u trougao je:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_{12} \underline{I}_{12}^* = (11.9 + j14.28) \text{ kVA},$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{23} \underline{I}_{23}^* = (11.9 + j14.28) \text{ kVA},$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{30} \underline{I}_{30}^* = (11.9 + j14.28) \text{ kVA},$$

a kompleksna snaga celog prijemnika je

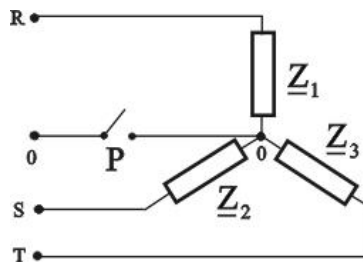
$$\underline{S}_{\Delta} = 3\underline{S}_1 = (35.7 + j42.84) \text{ kVA}.$$

Iz prethodnog se zaključuje da je kompleksna snaga koju prima prijemnik tri puta veća kada je prijemnik vezan u trougao, nego kada je prijemnik vezan u zvezdu,

$$\text{tj: } \underline{S}_{\Delta} = 3\underline{S}_{\lambda}.$$

Zadatak. 76 Trofazni prijemnik impedansi $\underline{Z}_1 = 200 \cdot e^{j0} \Omega$, $\underline{Z}_2 = 10 \cdot e^{j90} \Omega$, $\underline{Z}_3 = 10 \cdot e^{-j90} \Omega$, priključen je na simetričan, direktan trofazni sistem linijskih napona efektivnih vrednosti $U_1 = 381 \text{ V}$. Odrediti kompleksne izraze za struje faza prijemnika kada je prekidač P

- zatvoren
- otvoren



Sl.74

Rešenje:

Sistem linijskih napona je:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{RS} &= 381 \text{ V}, \\ \underline{U}_{ST} &= 381 e^{-j2\pi/3} \text{ V}, \\ \underline{U}_{TR} &= 381 e^{-j4\pi/3} \text{ V}.\end{aligned}$$

a) Kada je prekidač P zatvoren (postoji neutralni provodnik) fazni naponi su:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{RO} &= \frac{\underline{U}_{RS}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = (190.5 - j109.985) \text{ V} \\ \underline{U}_{SO} &= \frac{\underline{U}_{ST}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = (-190.5 - j109.985) \text{ V} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{TO} = \frac{\underline{U}_{TR}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = -j219.97 \text{ V}$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0.005 \text{ S},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = -j0.1 \text{ S},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = j0.1 \text{ S}.$$

Struje faza prijemnika su:

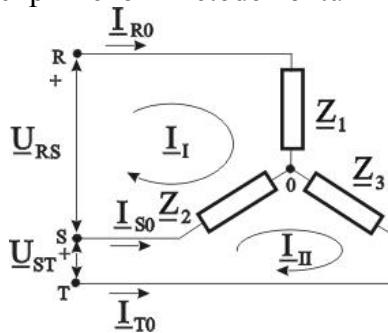
$$\underline{I}_{RO} = \underline{Y}_1 \underline{U}_{RO} = (0.95 - j0.55) \text{ A},$$

$$\underline{I}_{SO} = \underline{Y}_2 \underline{U}_{SO} = (-11 + j19.05) \text{ A},$$

$$\underline{I}_{TO} = \underline{Y}_3 \underline{U}_{TO} = -22 \text{ A}.$$

b) Kada je prekidač P otvoren (nema neutralnog provodnika) ne važi relacija (1) za fazne napone.

Fazne struje mogu naći primenom metode konturnih struja.



Sl.74.a

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_I - \underline{Z}_2 \underline{I}_{II} = \underline{U}_{RS},$$

$$-\underline{Z}_2 \underline{I}_I + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_{II} = \underline{U}_{ST},$$

$$\underline{I}_I = (32.996 - j19.05)A,$$

$$\underline{I}_{II} = (-348 - j640.87)A$$

$$\underline{I}_{R0} = \underline{I}_I = (32.996 - j19.05)A ,$$

$$\underline{I}_{S0} = \underline{I}_{II} - \underline{I}_I = (-381 - j621.82)A ,$$

$$\underline{I}_{T0} = -\underline{I}_{II} = (348 + j640.87)A .$$